现代数学译丛

微分方程的最大值原理

(美) M. H. [illegible]
H. F. [illegible] 著

科 学 出 版 社

现代数学译丛

微分方程的最大值原理

〔美〕M. H. 普劳特
H. F. 温伯格 著

叶其孝 刘西垣 译
周毓麟 吴兰成 校

科学出版社
1985

内 容 简 介

本书深入浅出地介绍了常微分方程以及二阶椭圆型、抛物型和双曲型偏微分方程的最大值原理，阅读本书仅需要高等微积分知识. 本书还安排了许多习题，以便读者加深理解.

本书可供高等院校有关专业师生、研究生以及科学工作者参考.

Murray H. Protter & Hans F. Weinberger

Maximum Principles in Differential Equations

Prentice-Hall, 1967

现代数学译丛

微分方程的最大值原理

〔美〕M. H. 普劳特 H. F. 温伯格 著

叶其孝 刘西垣 译

周毓麟 吴兰成 校

责任编辑 吕 虹 张鸿林

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1985年11月第一版 开本：850×1168 1/32

1985年11月第一次印刷 印张：9 3/4

印数：0001—8,100 字数：254,000

统一书号：13031·2982

本社书号：4385·13—1

定价： 2.75 元

为本书中译本写几句话

数学的思想是世界性的，但用来传播这种思想的各国语言是不同的．我们感谢译者使得中国读者可以利用这本关于微分方程的最大值原理及其应用的著作。

M．H．普劳特

H．F．温伯格

1981.10

序　　言

在偏微分方程的研究中所用到的最有用而且最为人们熟知的工具之一就是最大值原理．这个原理是微积分学中下述初等事实的推广：在区间 $[a, b]$ 上满足不等式 $f''>0$ 的任何函数 $f(x)$ 必在该区间的一个端点达到它的最大值，我们就说不等式 $f''>0$ 的解满足**最大值原理**．更一般地，若函数在区域 D 中满足一个微分不等式，并因此而在 D 的边界上达到其最大值，我们就说这种函数具有最大值原理．

偏微分方程的研究常常是从把方程分成各种类型开始的．最常研究的是椭圆型、抛物型和双曲型方程．由于在许多物理问题中自然地提出了这三类方程，所以，对偏微分方程感兴趣的数学家们往往把他们的精力集中于研究并推进对数学和物理学都重要的问题．通过研究物理上提出的问题来学习偏微分方程的读者，不但可以了解偏微分方程的历史发展进程，而且还可以清楚地了解为什么有些方程得到了详尽的研究，而另一些方程则实际上被忽略了的理由．因为许多与椭圆型、抛物型和双曲型方程有关的问题呈现了最大值原理，因此我们深感到研究与这些原理有关的方法和技巧，对于偏微分方程的研究构成了一个极好的引论和补充．

对于物理学中出现的微分方程问题，最大值原理通常有很自然的物理解释．在这种情形下，最大值原理可以帮助我们把物理直观应用于数学模型．因而任何读者学习了最大值原理，就可以了解重要的古典偏微分方程，同时还可以发现它们之所以重要的原因．

建立最大值原理所需要的证明是极其初等的．由于把注意力集中于可以用初等方法从最大值原理导出的那些应用，我们能够

把本书写成适合于学习自然科学的大学生的水平．任何读者学完了高等微积分，都可以阅读本书全部内容．实际上，任何读者除了知道初等微积分外，只要知道线积分，Green 定理以及某些关于连续性和可微性方面的简单事实，就会发现几乎全书的内容都能够理解．

不需要对解本身有任何明显的了解，最大值原理就使我们能得到有关微分方程解的信息． 特别是在解的近似方法(许多科学家极感兴趣的一个课题)中，最大值原理是一个有用的工具．行将证明，本书不仅对专业的数学家和主要对数学有兴趣的学生是有用的，而且对于那些对常微分方程、偏微分方程解的数值逼近，以及决定这种逼近的误差估计有兴趣的物理学家、化学家、工程师和经济学家都是有用的．

偏微分方程的最大值原理可以专门用于一个变量的函数，本书第一章就专门用来讨论这种一维的情形．结果的叙述和定理的证明是如此的简单，以致读者会发现微分方程最大值原理的这个引论确实非常容易． 当然一维最大值原理只涉及二阶常微分方程，并不涉及偏微分方程．在第一章中，我们证明，古典的 Sturm-Liouville 理论的一些部分乃是最大值原理的一个直接推论．本书之所以包括这一章，主要是因为它为后面会碰到的各种形式的最大值原理提供了一个既有吸引力而又简单的引论，它还提供了考虑常微分方程理论中某些课题的新方法．

在第二章中，我们建立椭圆型算子的最大值原理，叙述几个推广并给出许多应用．虽然 Laplace 方程和某些别的方程的最大值原理为人所知大约已有百年之久，但是，直到新近 Hopf 才建立了一般二阶椭圆型算子的强最大值原理．我们给出的很多重要应用都要用到这些结果．

抛物型算子的最大值原理所采取的形式和椭圆型算子的最大值原理的形式很不相同． 在第三章中我们介绍抛物型算子的 Nirenberg 强最大值原理．然后象在椭圆型的情形一样，证明可以用这个原理给出有关逼近和唯一性的结果．用来结束本章的最后

一节是关于一类特殊的抛物型方程组的最大值原理的.

第四章即最后一章处理双曲型算子的最大值原理. 这些原理所采取的形式反映了双曲型方程适定问题的结构. 对双曲型算子来说,无论是定理的叙述还是证明的方法都和椭圆型、抛物型算子十分不同. 特别是,在双曲型的情形,特征曲线和特征曲面的作用变得明显了.

由于最大值原理在如此众多的地方以如此多变的形式出现,使我们发现要讨论某些原来我们想要处理的课题是不可能的. 例如,有限差分算子的最大值原理被整个略去了. 我们也没有提及解析函数的模的最大值原理——一个具有许多重要而又有趣的应用的课题. 人们已经知道,有些阶数高于二阶的椭圆型方程也有最大值原理.(例如见 Miranda[1] 和 Agmon[1])我们决定本书也不包括这个论题了,因为它需要偏微分方程的高深技巧.

我们采用的大多数记号和符号是相当标准的. Euclid 空间中的一个区域D是一个连通开集. 通常把D的边界记为∂D. 符号$\cup$和$\cap$用来表示集合的并与交. 黑体字母表示向量,而对偏导数则采用习惯的记号u_{x_i}和$\partial u/\partial x_i$.

我们常用后面跟有方括号的字母L表示作用在函数上的一个线性算子. 也就是说,对某一函数类中的每个函数u, L确定了另一函数类中的一个函数$L[u]$. 如果,当定义了$L[u_1]$和$L[u_2]$时,对所有的常数α,β也定义了量$L[\alpha u_1+\beta u_2]$和$\alpha L[u_1]+\beta L[u_2]$,并且等式$L[\alpha u_1+\beta u_2]=\alpha L[u_1]+\beta L[u_2]$成立,则我们称$L$是线性的.

对于那些希望进一步钻研本课题的读者,我们在每章末都有一个文献讨论,它包括历史参考资料和有关本章内容的其它介绍以及进一步的结果和应用的一个指南. 因为我们对于微分方程的最大值原理这一主题始终是有兴趣的,所以我们乐于听到与本书的主题有关的结果,无论它们是旧的还是新的.

我们要感谢 Air Force Office of Scientific Research 和 National

Science Foundation，因为得到他们支持的研究导致了在这里首次发表的一些结果。

M. H. 普劳特

H. F. 温伯格

目　　录

第一章　一维最大值原理

第一节　最大值原理

在闭区间[1] $[a,b]$ 上连续的函数 $u(x)$ 在该区间的某一点上取到它的最大值．如果 $u(x)$ 有连续的二阶导数，而且在 a 和 b 之间的某点 c 处 u 有一个相对最大值，则从初等微积分知

$$u'(c)=0 \text{ 且 } u''(c)\leqslant 0. \tag{1}$$

假设在开区间 (a,b) 中，已知 u 满足形状为

$$L[u]\equiv u''+g(x)u'>0 \tag{2}$$

的微分不等式，其中 $g(x)$ 是任何有界函数，那么显然知道在 (a,b) 中的任何点 c 关系式(1)不能满足．因此，当(2)成立时，除在端点 a 或 b 外，u 不能在任何别的点处达到它的最大值．这里我们就有了最大值原理的最简单的情形．

上述论证的本质在于要求不等式(2)严格成立；也就是说，假设 $u''+g(x)u'$ 决不为零．在微分方程的研究和许多应用中，这样的要求是过分局限了，因而重要的是，如果可能的话，就去掉这个限制．然而，我们指出，非严格的不等式

$$u''+g(x)u'\geqslant 0$$

容许有解 $u=$常数．这种常数解在每一点都达到最大值．我们将证明只可能有这一种例外．

定理 1 （一维最大值原理）． 假设 $u=u(x)$ 满足微分不等式

$$L[u]\equiv u''+g(x)u'\geqslant 0 \text{ 当 } a<x<b \text{ 时}, \tag{3}$$

其中 $g(x)$ 是一个有界函数．如果在 (a,b) 中 $u(x)\leqslant M$，而且在

---

1) 记号 $[a,b]$ 表示闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$；记号 (a,b) 表示开区间 $a<x<b$．

(a,b)中的一个内点 c 处 u 达到最大值 M，则 $u \equiv M$。

证明. 我们假设 $u(c) = M$，又假设 (a, b) 中有一点 d 使 $u(d) < M$。我们将证明，这会导致矛盾. 为方便计，令 $d > c$。我们定义函数

$$z(x) = e^{\alpha(x-c)} - 1,$$

其中 α 是待定正常数. 注意到当 $a < x < c$ 时 $z(x) < 0$，当 $c < x < b$ 时 $z(x) > 0$，而 $z(c) = 0$。(见图 1.)

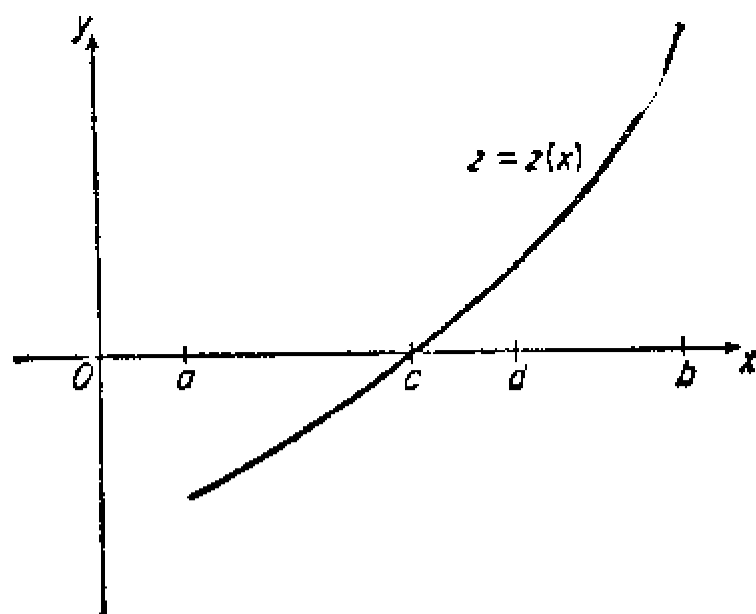


图 1

简单的计算给出

$$L[z] \equiv z'' + g(x)z' = \alpha[\alpha + g(x)]e^{\alpha(x-c)},$$

选 α 充分大使当 $a < x < d$ 时 $L[z] > 0$，即我们选 α 使之满足不等式

$$\alpha > -g(x);$$

由于 $g(x)$ 有界，我们总能这样作. 现在我们定义

$$w(x) = u(x) + \varepsilon z(x),$$

其中 ε 是一个选定的正常数，它满足不等式

$$\varepsilon < \frac{M - u(d)}{z(d)}.$$

由 $u(d) < M$ 的假设及 $z(d) > 0$ 的事实，选取这样的 ε 是可能

的．于是，因为当 $a < x < c$ 时 z 为负，我们就有

$$w(x) < M \quad \text{当} \ a < x < c \ \text{时},$$

由 ε 的定义，

$$w(d) = u(d) + \varepsilon z(d) < u(d) + M - u(d),$$

所以

$$w(d) < M.$$

在点 c

$$w(c) = u(c) + \varepsilon z(c) = M.$$

因此，w 有一个大于或等于M的最大值，并在 (a,b) 的一个内点处达到．但是

$$L[w] = L[u] + \varepsilon L[z] > 0,$$

所以，由前面关于严格不等式(2)的结果，w 不能在(a,b)中达到它的最大值．我们因此而得到了矛盾．

如果 $d < c$，我们利用辅助函数

$$z = e^{-\alpha(x-c)} - 1,$$

其中 $\alpha > g(x)$，可得到同样的结论．

上述证明的关键是构造具有下列性质的函数 $z(x)$：(i)$L[z] > 0$；(ii) 当 $x < c$ 时 $z(x) < 0$；(iii) 当 $x > c$ 时 $z(x) > 0$；(iv) $z(c) = 0$．[如果 d 小于 c，则不等式(ii)和(iii)反向．] 函数 z 决不是唯一的．例如，函数

$$z(x) = (x-a)^{\alpha} - (c-a)^{\alpha},$$

其中 α 充分大，也具有同样的四条性质．

把定理 1 用到$(-u)$上，我们就有**最小值原理**，它断言，满足微分不等式 $L[u] \leqslant 0$ 的非常数函数不能在内点达到它的最小值．

定理 1 的叙述中关于 g 的有界性条件可以放松．如果 g 在每个完全在(a,b)中的区间 $[a',b']$ 上有界，则定理 1 的结论仍然成立．我们只要简单地把论证用于包含点 c 和 d 作为内点的任何子区间 $[a',b']$ 即可．注意，可能 g 在(a,b)的每一闭子区间上有界，而当 x 趋向于 a 或 b 时则是无界的．例如，$g(x) = 1/(1-x^2)$ 在$(-1,1)$的每一闭子区间上是有界的．这点看来似乎并不重要，但

是事实上原来许多数学物理微分方程都有在定义区间端点上变成无界的系数 g.

用于证明定理 1 的方法能使我们获得有关满足 (3) 那种不等式的函数的一些另外的信息. 我们也许会想象 (3) 的解 u 能有图 2a 所示的函数的样子，即 u 在 $[a,b]$ 上的最大值在 a 达到，且 $u'(a)=0$. 事实上，这种情形决不可能发生. 如果最大值在左端点达到，则在该点斜率必为负(图 2b)；如果最大值在右端点达到，则在该点斜率必为正(图 2c). 下一个定理建立了精确的结果.

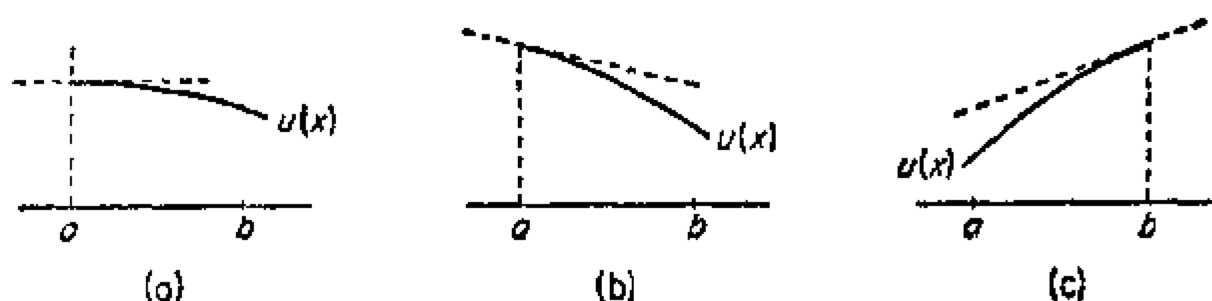


图 2

定理 2. 假设 u 是一个非常数函数，它在 (a,b) 中满足不等式 $u''+g(x)u'\geqslant 0$，并且在 a 和 b 有单侧导数，又假设 g 在 (a,b) 的每一闭子区间上有界. 如果 u 的最大值在 $x=a$ 达到，又 g 在 $x=a$ 有下界，则 $u'(a)<0$. 如果最大值在 $x=b$ 达到，且 g 在 $x=b$ 有上界，则 $u'(b)>0$.

证明. 假设 $u(a)=M$，当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时 $u(x)\leqslant M$，并对 (a,b) 中某点 d，我们有 $u(d)<M$. 仍定义辅助函数

$$z(x)=e^{\alpha(x-a)}-1 \quad 其中 \alpha>0.$$

当 $a\leqslant x\leqslant d$ 时，我们选 $\alpha>-g(x)$，所以 $L[z]>0$. 其次，我们作函数

$$w(x)=u(x)+\varepsilon z(x),$$

其中 ε 选得使

$$0<\varepsilon<\frac{M-u(d)}{z(d)}.$$

因为 $L[w]>0$，故 w 在 $[a,d]$ 中的最大值必在某个端点达到。我们有

$$w(a)=M>w(d),$$

所以最大值在点 a 达到. 因此，w 在点 a 的单侧导数不可能是正的：

$$w'(a)=u'(a)+\varepsilon z'(a)\leqslant 0,$$

可是

$$z'(a)=\alpha>0,$$

所以

$$u'(a)<0,$$

这就是所要的结果.

如果最大值在 $x=b$ 达到，论证是类似的。

附注. (i) 如果满足(3)的函数 u 在内点 c 处有一个相对最大值，则存在一个包含 c 作为内点的区间 $[a_1,b_1]$，在该区间上 $u(x)\leqslant u(c)$. 于是定理 1 表明，在达个区间上 $u(x)\equiv u(c)$. 把定理 2 用于所有以 c 为端点的区间上，我们知道，在相对最大值点上 $u(c)$ 的值实际上是 u 在区间 (a,b) 上的最小值.

(ii) 如果满足(3)的函数 u 在区间 (a,b) 的两点 c_1 和 c_2 处有相对最小值，则在 c_1 和 c_2 间必有一个相对最大值. 于是，从附注(i)可得 $u(c_1)=u(c_2)$，而且 $u(x)$ 在区间 (c_1,c_2) 上是常数.

(iii) 满足(3)的函数不可能有水平拐点.（如果 $u'(c)=0$ 而 u 在某包含 c 的区间中严格增加或严格减少，则称 u 在 $x=c$ 有水平拐点.）如果存在一个这样的点，我们可选一个以该点为端点的子区间（它无论是右端点或左端点都可以），在该区间上 u 在点 c 达到最大值. 于是与定理 2 矛盾.

(iv) 对 $L[u]\leqslant 0$ 的解类似于定理 2 的结果成立，因而得到相应的最小值原理. 我们把定理 2 用于函数 $(-u)$ 就可得到这个原理.

(v) 可以在定理 1 之前证明定理 2. 那么，下面的论证可立

即推出定理 1．如果 u 在内点 c 有最大值，则 $u'(c)=0$．把定理 2 用到区间 (a,c) 和 (c,b) 上去，我们就得到 u 是常数这一结论．

(vi) 对定理 1 和 2 的结论来说 g 的有界性是必须的．方程

$$u''+g(x)u'=0,$$

其中

$$g(x)=\begin{cases}-3/x & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\\ 0 & \text{当 } x=0 \text{ 时}\end{cases}$$

有解

$$u=1-x^4.$$

因为 u 在 $x=0$ 有最大值，所以在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上显然破坏了定理1．又因为 $u'(0)=0$，所以在 $[0,1]$ 上也破坏了定理 2．因为 g 在 $(0,1)$ 中没有下界，所以不能应用定理 1 和 2 的结果．

现在我们来处理更一般的微分不等式

$$(L+h)[u]=u''+g(x)u'+h(x)u\geqslant 0. \tag{4}$$

下述最简单的例子表明我们至多只能期望得到一种修正形式的最大值原理；方程

$$u''+u=0$$

有解 $u=\sin x$，它在 $x=\pi/2$ 达到其最大值．即使条件 $h(x)\leqslant 0$ 也不足以得到一个不受限制的最大值原理．我们注意到方程

$$u''-u=0$$

有解

$$u=-e^{x}-e^{-x},$$

它在 $x=0$ 达到其最大值(-2)．我们将要证明，当 $h\leqslant 0$ 时(4)的非常数解不可能在内点达到非负最大值．

容易看出，如果严格的不等式

$$(L+h)[u]>0,\ \text{其中 } h\leqslant 0$$

在开区间 (a,b) 中成立，则 u 不能在 (a,b) 的内点取到非负最大值．事实上，在任一这样的最大值点，我们有 $u'=0$，$u''\leqslant 0$，$hu\leqslant 0$，

与上面的严格不等式矛盾．这个事实使我们能够推广定理 1 和 2，而且除选取 α 充分大使 $(L+h)[z]>0$ 外，无须乎改变定理的任何论证．

函数 $e^{\alpha(x-c)}-1$（或者，如果 d 在 c 的左边时，函数 $e^{-\alpha(x-c)}-1$）中的常数 α 只须满足

$$\alpha^2-\alpha g(x)+h(x)[1-e^{-\alpha(x-c)}]>0$$

$$(\text{或者}\ \alpha^2-\alpha g(x)+h(x)[1-e^{\alpha(x-c)}]>0)。$$

因为 $h(x)\leqslant 0$，无论哪种情形，选 α 使

$$\alpha^2-\alpha|g(x)|+h(x)>0$$

就足够了．如果 $g(x)$ 和 $h(x)$ 有界，这当然可以办得到．我们也可以再一次证明只要 $g(x)$ 和 $h(x)$ 在 (a,b) 的每一闭子区间上有界就够了．这样我们得到了以下两个定理，它们是定理 1 和 2 的推广．

定理 3．如果 $u(x)$ 在区间 (a,b) 中满足微分不等式

$$(L+h)[u]\equiv u''+g(x)u'+h(x)u\geqslant 0 \tag{4}$$

其中 $h(x)\leqslant 0$，如果 g 和 h 在 (a,b) 的每一闭子区间上有界，又若 u 在内点 c 达到非负最大值 M，则

$$u(x)\equiv M.$$

注意，如果 h 不恒等于零，则满足(4)的非负常数M只有 $M=0$。

定理 4．假设 u 是微分不等式(4)的非常数解，在 a 和 b 有单侧导数，$h(x)\leqslant 0$，而且 g 和 h 在(a,b)的每个闭子区间上有界．如果 u 在点 a 有非负最大值，且函数 $g(x)+(x-a)h(x)$ 在 $x=a$ 有下界，则 $u'(a)<0$。如果 u 在点 b 有非负最大值，且函数 $g(x)-(b-x)h(x)$ 在 $x=b$ 有上界，则 $u'(b)>0$。

为把定理 2 的证明推广到定理 4，我们只需注意

$$\begin{aligned}(L+h)[e^{\alpha(x-a)}-1]&=e^{\alpha(x-a)}[\alpha^2+\alpha g+h(1-e^{-\alpha(x-a)})]\\&\geqslant e^{\alpha(x-a)}[\alpha^2+\alpha g+\alpha(x-a)h].\end{aligned}$$

推论．如果 u 在(a,b)中满足(4)，其中 $h(x)\leqslant 0$，如果 u 在

$[a,b]$ 上连续,又若 $u(a)\leqslant 0$, $u(b)\leqslant 0$, 则在 (a,b) 中 $u(x)<0$,除非 $u\equiv 0$。

习　　题

1.用函数 $z(x)=(x-a)^\alpha-(c-a)^\alpha$ 代替 $z(x)=e^{\alpha(x-c)}-1$ 来证明定理1.

2.函数 $u=\cos x$ 满足 $u''+g(x)u'=0$ 其中 $g(x)=-\mathrm{ctg}x$, 然而 u 在 $x=0$ 有最大值. 试作出解释. 求函数 u, 它在 $x=0$ 有水平拐点,并满足形为 $u''+g(x)u'\geqslant 0$ 的微分不等式.

3.证明如果当 $0<x<1$ 时,$u''+e^u=-x$, 则 u 不能在$(0,1)$中达到最小值.

4.证明 $u''-2\cos(u')=1$ 的解不能取局部最大值.

5.考虑问题

$$u''+e^xu'=-1 \quad 当\ 0<x<1\ 时,$$
$$u(0)=u(1)=0.$$

证明它的解在$(0,1)$中没有最小值. 再证明 $u'(0)>0$,$u'(1)<0$.

6.考虑不等式

$$u''+(\alpha/x)u'+(\beta/x^2)u\geqslant 0,\ 0<x<1,$$

其中 α 和 β 是常数. 对怎样的常数 α 和 β 可以应用定理3和4? 考虑用形状为 $u=x^n$ 的解来验证你的结论. 如果区间是 $-1<x<1$, 结果又是什么?

第二节　广义最大值原理

我们来研究微分不等式

$$(L+h)[u]\equiv u''+g(x)u'+h(x)u\geqslant 0, a<x<b, \quad (1)$$

而不要求 $h(x)$ 非正. 假设我们能够找到一个函数 w,它在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数,并满足不等式

$$w>0\ 在[a,b]上, \quad (2)$$

$$(L+h)[w]\leqslant 0\ 在(a,b)中. \quad (3)$$

我们定义新的因变量

$$v = \frac{u}{w}.$$

简单的计算给出

$$(L + h)[u] = (L + h)[vw]$$
$$= wv'' + (2w' + gw)v' + (L + h)[w]v \geqslant 0.$$

除以正量 w,我们看到 v 满足微分不等式

$$v'' + \left(2\frac{w'}{w} + g\right)v' + \frac{1}{w}(L + h)[w]v \geqslant 0. \tag{4}$$

当(4)连同(2)和(3)一起考虑时，不等式(4)表明 $v = u/w$ 满足定理 3 和 4.

上述论证有赖于满足(2)和(3)的函数 w 的存在性. 现在我们来证明如果 $h(x)$ 有界,$g(x)$ 有下界,而且区间$[a,b]$充分短，则存在满足不等式(2)和(3)的函数 w. 事实上，如果适当地确定常数 β,这样的函数可由

$$w = 1 - \beta(x - a)^2 \tag{5}$$

给出. 为证明这一点,我们计算

$$(L + h)[w] = -2\beta[1 + (x - a)g(x)$$
$$+ \frac{1}{2}(x - a)^2h(x)] + h(x). \tag{6}$$

根据假设，g 和 h 都有下界，因此存在常数 G 和 H 使 $g \geqslant G$ 和 $h \geqslant H$. 我们假定 a 和 b 靠得如此之近,以致当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时，有

$$1 + (x - a)G + \frac{1}{2}(x - a)^2H > 0,$$

又由 $h(x)$ 也有上界,我们可选 β 使

$$\beta \geqslant \frac{1}{2}\left[\frac{h(x)}{1 + (x - a)G + \frac{1}{2}(x-a)^2H}\right].$$

于是,因为(6),在(a,b)中我们就有 $(L + h)[w] \leqslant 0$. 如果长度 $(b - a)$ 充分小,使得

$$\beta(b - a)^2 < 1,$$

那么(5)表明在$[a, b]$上$w > 0$. 这样，具有所要求的性质的函数w总是可以构造出来的.

前面的讨论导出了下面的广义最大值原理.

定理 5. 假设算子$L + h$由(1)给出，其中$h(x)$有界而$g(x)$有下界. 对任何充分短的区间$[a,b]$可以找到满足(2)和(3)的函数w. 那么,如果u是在(a,b)中满足(1)的任何函数,则函数u/w就满足在定理 3 和 4 中给出的最大值原理.

附注. 定理 5 表明满足(1)的函数u不能振动得太迅速,因为如果在它的两个零点$x = a$和$x = b$之间$u > 0$，则u/w在a, b之间必有正最大值. 所以，除非这些零点之间的距离$b - a$大到使定理 5 不成立,否则定理 5 就被破坏了. 这样一来,我们发现在使定理 5 成立的任何区间(a,b)中u至多能有两个零点(在它们之间u是负的).

如果u是方程$u'' + g(x)u' + h(x)u = 0$的解,我们可把同样的推理用到u和$-u$上去，从而发现在使定理 5 成立的任何区间(a,b)中u至多能有一个零点.

设$r(x)$是微分方程

$$r'' + g(x)r' + h(x)r = 0 \tag{7}$$

的解,其中g和h是有界函数. 假设r不恒等于零,而且

$$r(a) = 0.$$

按照定理 5 后的附注，我们知道在a右边某个距离中r不能等于零. 如果在a的右边r有零点的话，我们用a^*来记第一个零点，并称之为a的共轭点. 因此，在区间(a, a^*)中r同号，为方便起见,我们假设当$a < x < a^*$时

$$r(x) > 0.$$

若在$[a,a^*]$上$w > 0$,则函数r/w在a和a^*为零，而在(a, a^*)中为正. 因此r/w在(a,a^*)中有一最大值. 所以,按定理 5, w不能满足(3). 另一方面,如果b是(a,a^*)中任何一点,那么可

以找到函数 w，使 r/w 满足定理5的最大值原理. 为证明这一点，我们首先注意，在包含于(a, a^*)中的任何子区间$[c, b]$上 $r(x)$ 以一个正数为下界，从而，对充分小的 $\varepsilon > 0$，函数

$$w(x) = r(x) + \varepsilon[2 - e^{\alpha(x-a)}]$$

在 $[a,b]$ 上是正的. 若选 α 使 $(L + h)[2 - e^{\alpha(x-a)}] \leqslant 0$ 在 (a, b)中成立，那么，w 就是使定理5成立的一个函数.

我们得到结论，**如果 a^* 是 a 的共轭点，那么，当且仅当 $b < a^*$ 时，存在一个 $w > 0$ 使得定理5在区间 $[a,b]$ 上成立.** 如果 $r(x)$ [(7)的满足 $r(a) = 0$ 的解]在 a 的右边没有零点，我们可令 $a^* = \infty$，于是定理5在任何区间$[a,b]$上成立.

如果 $h(x)$ 无界或 g 无下界，则可能不存在使定理5成立的区间$[a,b]$. 例如，函数

$$u = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

满足

$$u'' + x^{-4}u = 0.$$

我们看到 u 在 $x = 1/n\pi, n = 1,2,\cdots$ 上等于零，所以不可能存在具有下述性质的函数 $w > 0$：在任一区间 $[0, 1/n\pi], n = 1,2,\cdots$ 中 u/w 满足最大值原理.

习　　题

1. 试求下述问题的解

$$u'' + u = 0, \quad -\pi/4 < x < \pi/4,$$

$$u\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right), \quad u\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

并验证 u 在 $(-\pi/4, \pi/4)$ 中取到最大值，但 $u/\cos x$ 却不是这样.

2. 假设在 $(0,c)$ 中 $u'' + (\cos x)u \geqslant 0$. 如果 $w = 1 - \beta x^2$，试求出 β 和 c 的值使得 u/w 在 $(0,c)$ 中满足定理5.

3. 证明 $u'' + e^u = e$ 的解不能取大于1的最小值或小于1的最大值.

4. 证明在 $x = 0$ 附近 $u = x^3$ 满足形状为 $u'' + g(x)u' = 0$ 的方程，其中 g 无界，从而得出结论：定理5中有界性的假设是本质的.

第三节 初值问题

我们感兴趣的是

$$u'' + g(x)u' + h(x)u = f(x) \tag{1}$$

的满足初始条件

$$u(a) = \gamma_1,\ u'(a) = \gamma_2 \tag{2}$$

的解．函数 f, g 和 h 在区间 (a,b) 上给出，其中 g 和 h 有界；γ_1 和 γ_2 是给定的常数．当(1)在区间 (a,b) 中满足条件(2)的解已被确定时，我们就说初值问题有解．

这种初值问题解的存在性可从常微分方程的一般理论得出．这种解的唯一性，虽然也是一般理论的一个推论，但是却容易从广义最大值原理得到．下个定理给出了主要的结果．

定理 6．假设 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 是(1)在区间 (a, b) 中的解，而且 u_1 和 u_2 满足同样的初始条件(2)，则在 (a,b) 中 $u_1 \equiv u_2$。

证明．定义 $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$．于是 u 满足方程

$$u'' + g(x)u' + h(x)u = 0$$

和初始条件

$$u(a) = u'(a) = 0.$$

现在假设 u 在 (a,b) 中不恒等于零，我们将得出矛盾．

根据定理 5，存在 $\varepsilon > 0$，其大小只依赖于 g 和 h，并存在一个正函数 w，使得 u/w 在区间 $(a, a+\varepsilon)$ 中的最大值必在端点处达到．我们还注意到 $-u$ 满足同一方程并有同样的初始条件．因此再由定理 5 可得 $-u/w$ 的最大值必在一个端点 a 或 $a+\varepsilon$ 处达到．因此，u/w 的最大值或最小值必在 a 达到．但是在 $x = a$

$$\left(\frac{u}{w}\right)' = \frac{u'w - uw'}{w^2} = 0,$$

由于 u/w 满足定理 4，我们可得，u/w 是常数．又因为 $u(a) = 0$，这个常数就是零，即 u 在区间 $[a, a+\varepsilon]$ 上恒等于零．特别有

$$u(a+\varepsilon)=0,\ u'(a+\varepsilon)=0.$$

现在我们可以重复这个论证，并得到：在 $(a+\varepsilon, a+2\varepsilon)$ 中 $u\equiv 0$，因为 ε 只依赖于 g 和 h 在(a,b)中的界，所以 ε 的大小不变．我们只要把这个过程进行有限次就可推出在(a,b)中 $u\equiv 0$．

习　　题

1．证明问题

$$u''-\frac{1}{x}u'=0,$$

$$u(0)=u'(0)=0$$

有两个解 $u\equiv 0$ 和 $u=x^2$，并得结论：定理 6 中 g 的有界性是必须的．

2．求函数 $h(x)$ 使方程 $u''+h(x)u=0$ 有两个解满足 $u(0)=u'(0)=0$．

3．证明初值问题

$$u''+e^u=1 \quad 当 x>0 时,$$
$$u(0)=1, u'(0)=0$$

至多有一个解．

提示：利用平均值定理：对某个满足 $0<\theta<1$ 的 θ

$$e^{u_1}-e^{u_2}=(u_1-u_2)e^{u_2+\theta(u_1-u_2)},$$

建立 u_1-u_2 所满足的问题．

4．令 $L[u]\equiv u''+g(x)u'+h(x)u, a\leqslant x\leqslant b$，其中 g 和 h 有界．假设在(a,b)中 u_1 满足 $L[u_1]\geqslant 0$，而 u_2 满足 $L[u_2]\leqslant 0$．如果在$[a,b]$上 $u_1\leqslant u_2$，又若 $u_1(a)=u_2(a), u_1'(a)=u_2'(a)$，试证明在$(a,b)$中 $u_1\equiv u_2$．

第四节　边 值 问 题

最简单的边值问题是在区间 (a,b) 中确定方程

$$u''+g(x)u'+h(x)u=f(x) \tag{1}$$

服从**边界条件**

$$u(a)=\gamma_1,\ u(b)=\gamma_2 \tag{2}$$

的解．方程 (1) 满足 (2) 的解的唯一性问题可用最大值原理来回

答，但是，现在的情况要比初值问题复杂．因为简单方程

$$u'' + u = 0$$

在 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 上有解 $u_1 = \sin x$ 和 $u_2 \equiv 0$，而两个解都满足边界条件 $u(0) = u(\pi) = 0$．下面的结果给出了边值问题最简单的唯一性定理之一．

定理 7. 假设 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 都是(1)的满足边界条件(2)的解．如果在(a,b)中 $h(x) \leqslant 0$，则 $u_1 \equiv u_2$．

证明. 设 $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$，则 u 满足方程

$$u'' + g(x)u' + h(x)u = 0 \tag{3}$$

和边界条件

$$u(a) = u(b) = 0.$$

由定理 3，我们知道在 (a, b) 中 $u(x) \leqslant 0$．因为函数 $-u(x)$ 满足同样的方程和同样的边界条件，我们也可把定理 3 用于 $-u(x)$ 并得到在(a,b)中 $-u \leqslant 0$．所以，在(a,b)中 $u \equiv 0$．

现在我们来研究更一般的边值问题，它包含边界条件(2)作为一种特殊情形．我们考虑(1)的满足边界条件

$$\left.\begin{aligned} -u'(a)\cos\theta + u(a)\sin\theta = \gamma_1, \\ u'(b)\cos\phi + u(b)\sin\phi = \gamma_2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

的解，其中 $\gamma_1, \gamma_2, \theta$ 和 ϕ 都是给定的常数，并且 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$，$0 \leqslant \phi \leqslant \pi/2$．注意当 $\theta = \phi = \pi/2$ 时条件(4)化为条件(2)．

定理 8. 假设 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 是(1)的满足边界条件(4)的解．如果在(a,b)中 $h(x) \leqslant 0$，那么，除 $h \equiv 0$，$\theta = \phi = 0$ 时 u_1 和 u_2 可差一常数外，$u_1 \equiv u_2$．

证明. 和前面一样，定义 $u = u_1 - u_2$．于是 u 满足(3)及边界条件

$$\left.\begin{aligned} -u'(a)\cos\theta + u(a)\sin\theta = 0, \\ u'(b)\cos\phi + u(b)\sin\phi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

当且仅当 $h \equiv 0, \theta = 0$ 和 $\phi = 0$ 时，恒等于非零常数的函数 $u \equiv M$ 才能满足这些条件． 如果我们假设 u 在某点上为正的非常数解，我们将得出矛盾．由定理 3，u 在 a 或 b 取到其正的最大值．

假设最大值在点 a 达到，我们可用定理 4 断言 $u'(a)<0$。因为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ 且 $u(a)>0$，于是破坏了(5)中的第一个条件．类似地，如果最大值在点 b 达到，则破坏(5)中的第二个条件．我们可得任何非常数解决不可能为正。把同样的推理用于 $-u$ 就证明 u 决不能为负．因此，在 $[a,b]$ 上 $u\equiv 0$。

虽然不限制 $h(x)$ 为非正，也有可能建立边值问题的唯一性，但是，在讨论所包含的确切条件时必须小心谨慎．例如，只要 $b-a<\pi$，简单方程

$$u''+u=0$$

当边界条件是 $u(a)=u(b)=0$ 时只有解 $u\equiv 0$。另一方面，我们知道如果 $b-a=\pi$，这个结果就不对了．应用定理 5 给出的广义最大值原理可得到这种情形的特殊结果．

定理 9．假设 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 是 (1) 的满足同样边界条件(2)的解．如果 $b<a^*$，其中 a^* 是 a 的共轭点，则 $u_1\equiv u_2$。

除了要用到定理 5 给出的最大值原理外，定理 9 的证明不过是重复定理 7 的证明．注意由共轭点的定义可知，当 $b=a^*$ 时将失去唯一性。

习　　题

1．求问题

$$u''-u=0,\quad 0<x<1,$$
$$-u'(0)+u(0)=0,$$
$$u(1)=1$$

的解．

2．求 $a=1$ 关于微分方程

$$u''+2u'+2u=0$$

的共轭点．

3．求出 x 轴所有的区间，使得在这些区间中，通过确定任意点 a 的共轭点，可把定理 9 用于方程

$$(x^2+1)u''-2xu'+2u=0$$

的解。

第五节　边值问题中的逼近

假设我们要求方程

$$(L + h)[u] \equiv u'' + g(x)u' + h(x)u = f(x) \quad 当\ a < x < b\ 时 \tag{1}$$

满足边界条件

$$u(a) = \gamma_1, \quad u(b) = \gamma_2 \tag{2}$$

的解．在大多数情形下，求出这样的显式解是不可能的．人们常常希望用能得到显式误差估计的方式来逼近一个解．这种逼近等价于确定解的值的上、下界．

我们假设函数 f,g 和 h 有界，并且首先假设在(a,b)中 $h \leqslant 0$．在这种情形下，不需要解 u 本身的任何确切知识也能够应用定理 3 中的最大值原理来得出解 u 的界．

假设我们能求得具有下述性质的函数 $z_1(x)$：

$$(L + h)[z_1] \leqslant f(x) \quad 当\ a < x < b\ 时, \tag{3}$$

$$z_1(a) \geqslant \gamma_1, \quad z_1(b) \geqslant \gamma_2, \tag{4}$$

则函数

$$v_1(x) \equiv u(x) - z_1(x)$$

满足

$$(L + h)[v_1] \geqslant 0$$

和

$$v_1(a) \leqslant 0, \quad v_1(b) \leqslant 0.$$

第一节定理 3 中给出的最大值原理可用于 v_1，并得到：在$[a,b]$上 $v_1 \leqslant 0$．也就是说

$$u(x) \leqslant z_1(x) \quad 当\ a \leqslant x \leqslant b\ 时,$$

函数 $z_1(x)$ 就是 $u(x)$ 的一个上界．

类似地求一个函数 $z_2(x)$ 具有性质：

$$(L + h)[z_2] \geqslant f(x)$$

和

$$z_2(a) \leqslant \gamma_1, \quad z_2(b) \leqslant \gamma_2,$$

就可得到 u 的一个下界. 把最大值原理用于 $z_2(x) - u(x)$ 就证明了

$$u(x) \geqslant z_2(x) \text{ 当 } a \leqslant x \leqslant b \text{ 时.}$$

容易构造具有所要求的性质的函数 $z_1(x)$, $z_2(x)$. 我们可以利用多项式,有理函数,指数函数等等. 例如. 我们可令

$$z_1(x) = A\{2 - e^{-\alpha(x-a)}\},$$

并试选 A 和 α,使 $z_1(x)$ 满足(3)和(4). 选 α 充分大使 $a \leqslant x \leqslant b$ 时

$$(L + h)[e^{-\alpha(x-a)}] = (\alpha^2 - \alpha g + h)e^{-\alpha(x-a)} > 0.$$

我们用关系式

$$k = \min_{a \leqslant x \leqslant b} [(\alpha^2 - \alpha g + h)e^{-\alpha(x-a)}]$$

来定义常数 k,并选 A 使

$$A = \max\left[\gamma_1, \gamma_2, \frac{1}{k} \max_{a \leqslant x \leqslant b} \{-f(x)\}, 0\right],$$

即 A 是方括号内四个数中的最大数. 对刚才所选定的 A 和 α, 函数 $z_1(x) = A\{2 - e^{-\alpha(x-a)}\}$ 满足(3)和(4).

为了确定下界,我们选

$$z_2(x) = B\{2 - e^{-\alpha(x-a)}\},$$

其中 α 和 $z_1(x)$ 中所选的一样,而 B 是四个数中的最小数:

$$B = \min\left[\gamma_1, \gamma_2, \frac{1}{k} \min_{a \leqslant x \leqslant b} \{-f(x)\}, 0\right].$$

那么

$$B\{2 - e^{-\alpha(x-a)}\} \leqslant u(x) \leqslant A\{2 - e^{-\alpha(x-a)}\} \text{ 当 } a \leqslant x \leqslant b \text{ 时.}$$

特别,当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时我们有

$$|u(x)| \leqslant 2\max\left[|\gamma_1|, |\gamma_2|, \frac{1}{k} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|\right]. \qquad (5)$$

第四节中对于 $h \leqslant 0$ 的边值问题的唯一性定理可从(5)得到,因为 $f \equiv 0, \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ 蕴涵着当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时 $u \equiv 0$.

如果 u 是(1),(2)的解,而 $\bar{u}$ 是有关的问题

$$\bar{u}'' + g(x)\bar{u}' + h(x)\bar{u} = \bar{f}(x),$$
$$\bar{u}(a) = \bar{\gamma}_1, \quad \bar{u}(b) = \bar{\gamma}_2$$

的解，则差 $u - \bar{u}$ 满足

$$(u - \bar{u})'' + g(u - \bar{u})' + h(u - \bar{u}) = f - \bar{f},$$
$$u(a) - \bar{u}(a) = \gamma_1 - \bar{\gamma}_1, u(b) - \bar{u}(b) = \gamma_2 - \bar{\gamma}_2.$$

不等式(5)表明

$$|u(x) - \bar{u}(x)| \leqslant 2\max\left[|\gamma_1 - \bar{\gamma}_1|, |\gamma_2 - \bar{\gamma}_2|, \frac{1}{k}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x) - \bar{f}(x)|\right].$$

所以，如果量

$$|\gamma_1 - \bar{\gamma}_1|, |\gamma_2 - \bar{\gamma}_2|, \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x) - \bar{f}(x)|$$

都很小，则对区间(a,b)中所有的 x，$|u(x) - \bar{u}(x)|$ 也很小．在这种情形下，我们说问题(1)，(2)的解**连续依赖**于 $f(x)$ 和边值 γ_1，γ_2．

为表明实际上可以怎样得到解的显式界，我们来给出一个例题．

例．估计

$$u'' - xu = 0 \text{ 当 } 0 < x < 1 \text{ 时}$$

和

$$u(0) = 0, \ u(1) = 1$$

的解在 $x = \dfrac{1}{2}$ 处的值．

这时选取多项式作为比较函数 z_1 和 z_2 是方便的．我们令

$$z_1 = x \text{ 和 } z_2 = x - \beta x(1 - x).$$

于是显然有 $z_1(0) = z_2(0) = 0$，$z_1(1) = z_2(1) = 1$，并且

$$(L + h)[z_1] \leqslant 0, (L + h)[z_2] = -x^2 + \beta[2 + x^2(1 - x)] \geqslant 0$$
$$\text{当 } \beta \geqslant \frac{1}{2} \text{ 时}.$$

我们选 $\beta = 1/2$ 并得到

$$\frac{1}{2}(x + x^2) \leqslant u(x) \leqslant x.$$

特别在 $x=1/2$ 处有

$$\frac{3}{8}\leqslant u\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2},$$

即，$u\left(\frac{1}{2}\right)=0.4375\pm0.0625$，所以我们得到误差不超过 15% 的解. 实际上 $u\left(\frac{1}{2}\right)=0.4726$.

现在我们研究第四节中讨论过的比较一般的两点边值问题解的逼近问题. 假设 u 是方程

$$(L+h)[u]\equiv u''+g(x)u'+h(x)u=f(x)\quad \text{当 } a<x<b \text{ 时} \tag{6}$$

满足

$$\left.\begin{aligned}-u'(a)\cos\theta+u(a)\sin\theta=\gamma_1,\\ u'(b)\cos\phi+u(b)\sin\phi=\gamma_2\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

的解，量 θ 和 ϕ 是给定常数. 我们假设

$$0\leqslant\theta\leqslant\pi/2,\ 0\leqslant\phi\leqslant\pi/2,\ h(x)\leqslant0.$$

与比较简单的两点边值问题作法类似，我们寻求具有以下性质的函数 $z_1(x)$:

$$(L+h)[z_1]\leqslant f(x)\ \text{当 } a<x<b \text{ 时}, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}-z_1'(a)\cos\theta+z_1(a)\sin\theta\geqslant\gamma_1,\\ z_1'(b)\cos\phi+z_1(b)\sin\phi\geqslant\gamma_2.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

于是函数 $v_1\equiv u-z_1$ 满足

$$(L+h)[v_1]\geqslant0,$$
$$-v_1'(a)\cos\theta+v_1(a)\sin\theta\leqslant0,$$
$$v_1'(b)\cos\phi+v_1(b)\cos\phi\leqslant0.$$

如果 v_1 是正的，定理 3 说明它的正最大值在 a 或 b 达到. 若在 a 达到，我们就有 $v_1(a)>0, v_1'(a)\leqslant0$. 因为

$$-v_1'(a)\cos\theta+v_1(a)\sin\theta\leqslant0,$$

故仅当 $\theta=0$ 和 $v'(a)=0$ 时这才可能. 于是定理 4 表明 $v_1(x)$ 是一个正常数，因此蕴涵着 $h\equiv0$.

类似地，因为

$$v_1'(b)\cos\phi + v_1(b)\sin\phi \leqslant 0,$$

v_1 不能在点 b 有正最大值，除非 $\phi = 0$ 且 $h \equiv 0$。我们得到：除非 θ 和 ϕ 都等于零并且 $h \equiv 0$，就有 $v_1(x) \leqslant 0$. 也就是说

$$u(x) \leqslant z_1(x).$$

类似地，如果 z_2 满足不等式

$$(L + h)[z_2] \geqslant f(x), \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} -z_2'(a)\cos\theta + z_2(a)\sin\theta \leqslant \gamma_1, \\ z_2'(b)\cos\phi + z_2(b)\sin\phi \leqslant \gamma_2, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

又如果 h 不恒等于零或 θ 和 ϕ 不全为零，则

$$u(x) \geqslant z_2(x).$$

这样一来，我们得到有关逼近的如下结果.

定理 10. 假设 $u(x)$ 是 (6) 的满足边界条件 (7) 的解，并且 $h(x) \leqslant 0, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$，以及 $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/2$. 又假设并非所有的等式 $\theta = 0$, $\phi = 0$, $h \equiv 0$ 都成立. 如果 $z_1(x)$ 满足条件(8),(9)，又 $z_2(x)$ 满足条件(10),(11)，则

$$z_2(x) \leqslant u(x) \leqslant z_1(x).$$

容易在多项式，指数等等形式的函数中找到满足定理 10 条件的具体的函数 z_1 和 z_2。我们给出一个例子，它表明可以怎样应用定理 10.

例. 求边值问题

$$u'' - xu = 0 \quad 当\ 0 < x < 1\ 时,$$

$$-u'(0) + u(0) = 0,$$

$$u(1) = 1$$

的解在 $x = 1/2$ 的上，下界.

我们令

$$z_1 = \frac{1}{2}(1 + x),$$

于是

$$(L + h)[z_1] = -\frac{1}{2}x(1 + x) \leqslant 0,$$

$$-z_1'(0)+z_1(0)=0,\quad z_1(1)=1.$$

对 z_2 我们选指数函数

$$z_2=e^{x-1}$$

并求得

$$(L+h)[z_2]=(1-x)e^{x-1}\geqslant 0,$$
$$-z_2'(0)+z_2(0)=0,\quad z_2(1)=1.$$

因此

$$e^{x-1}\leqslant u(x)\leqslant\frac{1}{2}(1+x).$$

特别在 $x=\frac{1}{2}$ ，

$$0.6065\leqslant u\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant 0.7500,$$

或 $u\left(\frac{1}{2}\right)=0.6782\pm 0.0718$. $\left[\text{实际上 } u\left(\frac{1}{2}\right)=0.6783.\right]$ 当然，选取更复杂的函数作 z_1 和 z_2,我们可求得更好的界.

现在我们来去掉 $h\leqslant 0$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$, $0\leqslant\phi\leqslant\pi/2$ 的假设. 如果必要，用(−1)乘以(7)中的边界条件，总可使 $\cos\theta\geqslant 0$ 和 $\cos\phi\geqslant 0$.这样一来，不失一般性，我们可设 $-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2$, $-\pi/2\leqslant\phi\leqslant\pi/2$.

为了利用第二节的广义最大值原理，假设我们能够找到满足下列不等式的一个正函数 $w(x)$：

$$(L+h)[w]\leqslant 0\ \text{在}(a,b)\text{中},\tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}-w'(a)\cos\theta+w(a)\sin\theta\geqslant 0,\\ w'(b)\cos\phi+w(b)\sin\phi\geqslant 0.\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

我们令

$$v=\frac{u}{w},$$

并得出 v 必满足

$$v''+\left(\frac{2w'}{w}+g\right)v'+\frac{1}{w}(L+h)[w]v=\frac{f}{w},$$

$$-v'(a)w(a)\cos\theta + v(a)[-w'(a)\cos\theta + w(a)\sin\theta] = \gamma_1,$$
$$v'(b)w(b)\cos\phi + v(b)[w'(b)\cos\phi + w(b)\sin\phi] = \gamma_2.$$

我们可把这些方程写成(6)和(7)的形式，

$$(\bar{L} + H)[v] \equiv v'' + Gv' + Hv = \frac{f}{w}, \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} -v'(a)\cos\bar{\theta} + v(a)\sin\bar{\theta} = \bar{\gamma}_1, \\ v'(b)\cos\bar{\Phi} + v(b)\sin\bar{\Phi} = \bar{\gamma}_2, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

其中 $H = (L + h)[w]/w \leqslant 0$, $G = (2w'/w) + g$,

$$\operatorname{tg}\bar{\theta} = \frac{1}{w(a)\cos\theta}[-w'(a)\cos\theta + w(a)\sin\theta] \geqslant 0,$$

$$\operatorname{tg}\bar{\Phi} = \frac{1}{w(b)\cos\phi}[w'(b)\cos\phi + w(b)\sin\phi] \geqslant 0,$$

$$\bar{\gamma}_1 = \gamma_1\cos\bar{\theta}/w(a)\cos\theta, \bar{\gamma}_2 = \gamma_2\cos\bar{\Phi}/w(b)\cos\phi.$$

由(13)我们可在 $0 \leqslant \bar{\theta} \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \bar{\Phi} \leqslant \pi/2$ 范围中选取 $\bar{\theta}$ 和 $\bar{\Phi}$. (如果 $\theta = \pi/2$，我们令 $\bar{\theta} = \pi/2$，又如果 $\phi = \pi/2$，我们令 $\bar{\Phi} = \pi/2$.)

假设存在$[a,b]$上的一个正函数 $w(x)$ 满足条件(12)和(13). 如果 z_1 和 z_2 分别满足条件(8),(9)和(10),(11),那么函数

$$\frac{z_1}{w} \text{ 和 } \frac{z_2}{w}$$

相对方程(14)及边界条件(15)来说就满足类似的条件. 因此，由定理 10 知,除非 $\bar{\theta} = \bar{\Phi} = 0$ 且 $H \equiv 0$,我们有不等式

$$\frac{z_2(x)}{w(x)} \leqslant \frac{u(x)}{w(x)} \leqslant \frac{z_1(x)}{w(x)}.$$

当不等式(12)和(13)都成为等式时,才出现例外情况. 所以,如果存在一个满足(12)和(13)的正函数 $w(x)$,但它并不使所有的不等式都是等式,我们就得到和以前一样的界

$$z_2(x) \leqslant u(x) \leqslant z_1(x). \tag{16}$$

如果 w 满足的是带等号的,而不是带不等号的(12)和(13),则我们可以把 w 的一个倍数加到(6)和(7)的一个解 u 上去而得到另

一个解．即解不唯一．当然也可能完全没有解，但是，如果至少有一个解，那么就有许多解．当然并非所有这些解都满足(16)．

如果对(6)，(7)的解不等式(16)成立，则

$$(L+h)[w]=0 \text{ 在 } (a,b) \text{ 中} \tag{17}$$

的满足边界条件

$$\left.\begin{aligned} -w'(a)\cos\theta+w(a)\sin\theta=1, \\ w'(b)\cos\phi+w(b)\sin\phi=1 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

的解必非负．选 $z_2\equiv 0$ 就很容易证明这一点．如果在一内点处 $w=0$，在该点我们也有 $w'=0$．初值问题的唯一性定理蕴涵着 $w\equiv 0$，这破坏了边界条件(18)．所以 w 不能在内点等于零．如果 w 在一个端点，例如在点 a 等于零，则(18)中的第一个条件变成 $w'(a)\cos\theta=-1$；w 的非负性蕴涵着 $w'(a)\geqslant 0$，矛盾．所以 $w(a)>0$，类似地有 $w(b)>0$．因此，在$[a,b]$上 $w>0$．

在问题(17)，(18)有解的假设下，我们已经建立了如下结果．

定理 11． 设 u 是(6)，(7)的解，其中$-\pi/2<\theta\leqslant\pi/2$，$-\pi/2<\phi\leqslant\pi/2$．设 z_1 和 z_2 分别满足不等式(8)，(9)和(10)，(11)．那么，当且仅当在$[a,b]$上存在一个满足不全是等式的不等式(12)和(13)的正函数 w 时，估计式

$$z_2(x)\leqslant u(x)\leqslant z_1(x) \tag{19}$$

成立．

如果 $h\leqslant 0$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ 及 $0\leqslant\phi\leqslant\pi/2$，则函数 $w\equiv 1$ 满足条件(12)，(13)，从而立即得到定理 10．

函数 w 在不等式(19)中并不出现，因而，得到这样的定理是有意义的，在该定理中完全消去了 w，并且提供了保证 z_1 和 z_2 成为上、下界的条件．下一个结果给出了这种情形成立的一个必要充分条件．

定理 12． 假设 $z_1(x)$ 和 $z_2(x)$ 分别满足不等式(8)，(9)和(10)，(11)，而且并非在所有条件中等号成立．设 $g(x)$ 在每个区间$[a,c]$上有下界，而在每个区间$[c,b]$上有上界，其中 $a<c<b$．设 $u(x)$ 是(6)，(7)的解．那么，当且仅当对 $a\leqslant x\leqslant b$ 有

$z_2(x) \leqslant z_1(x)$ 时，估计式

$$z_2(x) \leqslant u(x) \leqslant z_1(x) \tag{20}$$

成立.

证明. 如果(20)成立，则显然有 $z_2(x) \leqslant z_1(x)$。现在我们假设 $z_1(x) - z_2(x)$ 非负，必须证明(20)成立. 如果

$$q(x) \equiv z_1(x) - z_2(x)$$

在 $[a,b]$ 上严格为正，那么我们可选 q 作为定理 11 中的函数 w，所有的要求它都满足，从而(20)成立. 因此，我们只需研究 q 在 $[a,b]$ 上有一个零点这种可能性.

按照(8),(9),(10)和(11), q 满足不等式

$$(L+h)[q] \leqslant 0, \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned} -q'(a)\cos\theta + q(a)\sin\theta \geqslant 0, \\ q'(b)\cos\phi + q(b)\sin\phi \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

并且由假设知，等号不能同时在所有的条件(21),(22)中成立.

首先假设在内点 c 处 $q(c)=0$. 于是 q 在 c 有局部最小值，从而 $q'(c)=0$. 从定理 6 我们可得结论 $q\equiv 0$. 这样在所有的条件(21),(22)中等号都成立，与我们的假设矛盾.

仅存的可能性是在(a,b)中 $q>0$ 而在一个端点 $q=0$，例如在 $x=a$, $q=0$. 于是根据定理 5, $q'(a)>0$. 但这就破坏了(22)中的第一个不等式，除非 $\theta=\pi/2$. 类似地，若 q 在 b 等于零，则 ϕ 必须等于 $\pi/2$. 若 q 在一个或两个端点为零，那么它不满足定理 11 中对 w 所要求的条件. 在这些情形下，我们将要证明或者(21),(22)中所有的等号都成立，或者我们能够找到一个 $[a,b]$ 上的正函数 $w(x)$，它能够用作定理 11 中的辅助函数.

我们首先考虑 $q(b)=0$ 而 $q(a)>0$ 的情形. 如我们上面所见必有 $\phi=\pi/2$. 我们构造满足

$$(L+h)[r]=0,$$

$$r(a)=\cos\theta,\ r'(a)=\sin\theta$$

的函数 $r(x)$. 如果 $\theta<\pi/2$，则 r 在 a 为正，又若 $\theta=\pi/2$，我们有 $r(a)=0$，而在 $x=a$ 附近 $r>0$.

现在我们定义函数

$$v(x)=\frac{r(x)}{q(x)}\quad 当 a\leqslant x<b 时$$

并注意 $v(a)\geqslant 0$ 及

$$v'(a)=\frac{q(a)r'(a)-r(a)q'(a)}{[q(a)]^2}=\frac{q(a)\sin\theta-q'(a)\cos\theta}{[q(a)]^2}\geqslant 0.$$

因为 $(L+h)[r]=0$ 和 $(L+h)[q]\leqslant 0$，v 满足一个 v 的系数非正的二阶常微分方程。这样，根据应用于形状为 $[a,c]$ 的任何子区间的定理 3 和 4，或者 $v(c)>v(a)$ 且 $v'(c)>0$，或者在整个子区间 $[a,c]$ 上 $v(x)\equiv v(a)$。无论那种情形，对(a,b)中的 x 都有 $r(x)>0$。我们将要证明还有 $r(b)>0$。

如果在 $[a,b]$ 上 $v(x)\equiv v(a)$，则 q 与 r 成比例；因此有 $(L+h)[q]=0$ 和$-q'(a)\cos\theta+q(a)\sin\theta=0$。由于等号不在所有的条件(21)和(22)中成立，于是由此得出 $q(b)>0$，与假设矛盾。这样一来对(a,b)中某数 c，我们必有

$$v(c)>v(a)\geqslant 0\ 及\ v'(x)>0\ 当 x\geqslant c 时.$$

现在

$$v'(x)=\frac{r'q-q'r}{q^2}.$$

令

$$\phi(x)\equiv r'q-q'r,$$

从 r 的微分方程和 q 的微分不等式我们求得

$$\phi'(x)+g\phi(x)=-r(L+h)[q]\geqslant 0.$$

于是，若在区间$[c,b]$上 $q\leqslant M$，我们就知道

$$\frac{d}{dx}\log\phi\geqslant -M;$$

因此

$$\phi(x)\geqslant\phi(c)e^{-M(x-c)}.$$

特别

$$\phi(b)\geqslant\phi(c)e^{-M(b-c)}>0.$$

因为 $\phi = r'q - q'r$，又因 $q(b) = 0$，$q'(b) < 0$，由此可得 $r(b) > 0$。这样我们已证明在整个区间 $(a, b]$ 上 $r > 0$。此外，$(L + h)[r] = 0$ 及

$$-r'(a)\cos\theta + r(a)\sin\theta = 0.$$

因为 $\phi = \pi/2$，我们有 $r'(b)\cos\phi + r(b)\sin\phi = r(b) > 0$。从而函数 $w(x) = q(x) + r(x)$ 满足定理 11 的要求。

如果 $q(a) = 0$ 而 $q(b) > 0$，我们可类似证明

$$(L + h)[s] = 0,$$
$$s(b) = \cos\phi,$$
$$s'(b) = -\sin\phi$$

的解在 $[a, b)$ 中是正的，所以 $w = q + s$ 满足定理 11 的条件。最后，如果 $\theta = \phi = \pi/2$ 及 $q(a) = q(b) = 0$，我们发现除 $x = a$ 外 $r > 0$，而除 $x = b$ 外 $s > 0$，所以 $w = r + s$ 满足定理 11 的条件。

附注. (i) 如果对所有的条件(8)，(9)和(10)，(11)等号成立，则 z_1 和 z_2 两者都满足(6)，(7)的所有条件。如果 z_1 和 z_2 不同，则我们知道解不唯一；如果 $z_1 \equiv z_2$，则解可能唯一也可能不唯一。

(ii) 从证明中容易看出，g 在端点的有界性可用以下条件代替：g 在 (a, b) 的每个闭子区间上有界，当 $x > c_1$ 时 $\int_{c_1}^{x} g(\xi)d\xi$ 有上界，而当 $x < c_2$ 时 $\int_{x}^{c_2} g(\xi)d\xi$ 有下界，其中 c_1 和 c_2 是 (a, b) 中的某二数。

习　　题

1. 如果

$$u'' - (1 + x^2)u = 0 \quad 当 0 < x < 1 时,$$
$$u(0) = 1, \quad u(1) = 0.$$

求 $u\left(\frac{1}{2}\right)$ 的上、下界。

2. 如果

$$u'' + 3u' - xu = 0 \quad 当 0 < x < 1 时,$$

$$-u'(0)+u(0)=0,\quad u(1)=1.$$

求 $u\left(\frac{1}{2}\right)$的上、下界.

3.如果

$$u''-(1+x^2)u=0 \text{ 当 } 0<x<1 \text{ 时;}$$
$$u(0)=1,\quad u(1)=0.$$

求 $u'(0)$ 的上、下界.

提示：选 z_1 和 z_2 使 $z_1(0)=z_2(0)=1$;由此求差商 $[u(x)-u(0)]/x$ 的界.

4.设 u 是$u''+g(x)u'+h(x)u=0$, $a<x<b$, 的一个解，其中 $h(x)\leqslant 0$. 试指出如何构造只依赖于系数 g 和 h 的界以及 $b-a$ 的常数 K，使得如果在$[a,b]$上 $|u|\leqslant M$ 就有 $|u'(a)|\leqslant MK$.

提示：构造 z_1 和 z_2 使得 $z_1(a)=z_2(a)=u(a)$；由此得到差商 $[u(x)-u(a)]/(x-a)$ 的界.

5.选 $z_1(x)$ 为三阶多项式，并得出定理 10 后例题(第 20 页)中 $u\left(\frac{1}{2}\right)$ 的改进的上界.

6.如果当 $0<x<1$ 时 $u''+xu'-h(x)u=0$, $u(0)=0$, $u(1)=1$, 而且

$$h(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } 0<x\leqslant\frac{1}{2} \text{ 时,}\\ 2 & \text{当 } \frac{1}{2}<x\leqslant 1 \text{ 时.}\end{cases}$$

求 $u\left(\frac{1}{2}\right)$的上界.

第六节　初值问题中的逼近

在第三节中我们讨论了初值问题解的唯一性. 也就是说，我们证明了方程

$$(L+h)[u]\equiv u''+g(x)u'+h(x)u=f(x) \text{ 当 } x>a \text{ 时} \tag{1}$$

至多只有一个满足初始条件

$$u(a)=\gamma_1,\quad u'(a)=\gamma_2 \tag{2}$$

的解。

和边值问题的情况一样，通常不可能显式地求解初值问题。所以重要的是能求一个近似解并估计出逼近中的误差。首先，我们在

$$h(x) \leqslant 0$$

在 $[a,b]$ 上处处成立的假设下进行，其中 $[a,b]$ 是要在其中逼近(1),(2)的解的区间。

假设我们能够求得具有下列性质的函数 $z_1(x)$：

$$(L+h)[z_1] \geqslant f(x) \quad 当\ a \leqslant x \leqslant b, \tag{3}$$

$$z_1(a) \geqslant \gamma_1, \ z_1'(a) \geqslant \gamma_2. \tag{4}$$

定义函数

$$v_1(x) \equiv z_1(x) - u(x),$$

我们就有

$$(L+h)[v_1] \geqslant 0$$

和

$$v_1(a) \geqslant 0, \quad v_1'(a) \geqslant 0.$$

因为 $v_1(a) \geqslant 0$，在 $[a,b]$ 的任何子区间 $[a,x_0]$ 上函数 v_1 有非负最大值。按定理 3 中给出的最大值原理，这个最大值必在 a 或 x_0 取到。因为 $v_1'(a) \geqslant 0$，我们从定理 4 顺便可得，除非在 (a,x_0) 中 v_1 到处是常数，否则最大值不能在 a 达到。因此定理 3 表明对每个 $x_0 > a$，我们都有

$$v_1(x_0) \geqslant v_1(a) \tag{5}$$

和

$$v_1'(x_0) \geqslant 0. \tag{6}$$

用 x 代替 x_0，不等式(5)说明

$$u(x) \leqslant \gamma_1 + z_1(x) - z_1(a) \ 当\ x \geqslant a\ 时, \tag{7}$$

而不等式(6)说明

$$u'(x) \leqslant z_1'(x) \ 当\ x \geqslant a\ 时. \tag{8}$$

由于 $z_1(a) - \gamma_1 \geqslant 0$，不等式(7)蕴涵着 $u(x) \leqslant z_1(x)$。我们注意函数 $z_1(x) - [z_1(a) - \gamma_1]$ 重又满足条件(3)和(4)，但它

在 $x=a$ 处等于 u. 用 $z_1(x)-[z_1(a)-\gamma_1]$ 代替 $z_1(x)$ 时不等式 $u(x)\leqslant z_1(x)$ 又是(7). 这样,不失一般性可用较简单的不等式 $u(x)\leqslant z_1(x)$ 来代替(7).

用类似的方法可以得到下界. 假设我们能找到一个函数 z_2 使得不等式

$$(L+h)[z_2]\leqslant f(x)\quad \text{当 } a\leqslant x\leqslant b \text{ 时} \tag{9}$$

和

$$z_2(a)\leqslant\gamma_1,\quad z_2'(a)\leqslant\gamma_2 \tag{10}$$

成立. 于是,由定理 3 和 4,我们得到

$$u(x)\geqslant\gamma_1+z_2(x)-z_2(a)$$

和

$$u'(x)\geqslant z_2'(x).$$

不失一般性,我们可用 $u(x)\geqslant z_2(x)$ 来代替第一个不等式.

我们已建立了如下结果.

定理 13. 如果 $u(x)$ 是(1)的满足初始条件(2)的解, 又若 $z_1(x)$ 和 $z_2(x)$ 分别满足(3),(4)和(9),(10), 则

$$z_2(x)\leqslant u(x)\leqslant z_1(x) \tag{11}$$

和

$$z_2'(x)\leqslant u'(x)\leqslant z_1'(x). \tag{12}$$

注意, 不等式(3)和(9)是边值问题中对上, 下界所需要的那些不等式的反向不等式. 如果能找到如上所述的函数 $z_1(x)$ 和 $z_2(x)$, 则不等式(11)和(12)表明可用这些函数来逼近 $u(x)$ 和 $u'(x)$. 不必知道解 u 本身的任何特殊知识就可以作这种逼近, 逼近的精确度将依赖于我们能选到多好的函数 z_1 和 z_2.

例. 求初值问题

$$(L+h)[u]\equiv u''+\frac{1}{x}u'-u=0,$$

$$u(0)=1,\quad u'(0)=0$$

的解的值 $u(1)$ 的界. 这个解被称为虚变量的零阶 Bessel 函数,常记为 $I_0(x)$.

把 $z_1(x)$ 和 $z_2(x)$ 选成多项式是方便的．我们令

$$z_1(x) = c_1x^2 + 1,$$

则 $z_1(0) = 1, z_1'(0) = 0$．取常数 c_1，使

$$(L + h)[z_1] = c_1(4 - x^2) - 1$$

当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时非负．值 $c_1 = \dfrac{1}{3}$ 就合适，因而我们得到

$$u(x) \leqslant \frac{1}{3}x^2 + 1 \quad 当 0 \leqslant x \leqslant 1 时,$$

特别

$$u(1) \leqslant \frac{4}{3}.$$

类似地，如果我们令

$$z_2(x) = c_2x^2 + 1$$

并选 $c_2 = \dfrac{1}{4}$，则

$$(L + h)[z_2] \leqslant 0$$

以及 $z_2(0) = 1$，$z_2'(0) = 0$．所以，当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时 $u(x) \geqslant \dfrac{1}{4}x^2 + 1$．$u(1)$的上，下界是

$$1.250 \leqslant u(1) \leqslant 1.333. \tag{13}$$

现在我们来展示一些改进(13)中上，下界的方法．为改进这些界，我们可以利用定理 13 中通过 $z_1'(x)$ 和 $z_2'(x)$ 来给出 $u'(x)$的界的部分．

为了改进上界，我们首先考虑子区间$[0,t]$，其中 $t < 1$．仍选同样的函数

$$z_1(x) = c_1x^2 + 1 \quad 当 0 \leqslant x \leqslant t 时,$$

取

$$c_1 = \frac{1}{4 - t^2}$$

时它满足不等式

$$(L+h)[z_1] = c_1(4-x^2) - 1 \geqslant 0 \quad 当\ 0 \leqslant x \leqslant t\ 时.$$

这样我们求得当 $0 \leqslant x \leqslant t$ 时

$$u(x) \leqslant \frac{x^2}{4-t^2} + 1$$

和

$$u'(x) \leqslant \frac{2x}{4-t^2}.$$

特别是，

$$u'(t) \leqslant \frac{2t}{4-t^2}.$$

现在，窍门在于把最后这个不等式在 0 到 1 间对 t 积分. 我们得出

$$u(1) - u(0) \leqslant \log\left(\frac{4}{3}\right) \leqslant 0.288.$$

因此我们有上界

$$u(1) \leqslant u(0) + 0.288 = 1.288. \tag{14}$$

如果用形状为 $z_2 = c_2x^2 + 1$ 的函数，这个方法不能得出 $u(1)$ 下界的任何改进. 但是，可以用另一种分割区间的方法来改进下界.

我们把区间 (0, 1) 分成两部分，并分别在每一部分上定义 $z_2(x)$. 在区间 $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$，选 z_2 如前:

$$z_2(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1.$$

这样，我们得到界

$$u\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant z_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{16},$$

$$u'\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant z_2'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

对区间 $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$，我们定义

$$z_2(x)=c_3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{17}{16}+\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

按照这个定义，z_2 和 z_2' 都在[0,1]上连续．我们选 c_3 使

$$(L+h)[z_2]\equiv c_3\left[2+\frac{2x-1}{x}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]$$
$$+\frac{1}{4x}-\frac{17}{16}-\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)\leqslant 0$$
$$\text{当 } \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1 \text{ 时.}$$

如果当 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时

$$c_3\leqslant\frac{4x^2+15x-4}{4(-4x^3+4x^2+15x-4)},$$

上面不等式就会成立．不难看出右端是增长的，因此选取

$$c_3=\frac{9}{32}$$

就够了．这样我们又得到

$$u(1)\geqslant z_2(1)=\frac{161}{128}\geqslant 1.258.$$

把这个不等式与(14)结合起来，给出

$$1.258\leqslant u(1)\leqslant 1.288$$

或

$$u(1)=1.273\pm 0.015$$

(实际上 $u(1)=1.2661$)．

把(0,1)分成几个子区间，分别在每个子区间上定义 $z_2(x)$ 可以进一步改进下界．把 u 和 u' 在每个区间端点的下界 z_2 和 z_2' 取作下一个区间上 z_2 和 z_2' 的初值，初值的这种选法其结果是使函数 $z_2(x)$ 在[0,1]上有连续的一阶导数，但是并非必然有连续的二阶导数．用同样的方法也可以改进上界．

上例中的分划法启发我们得到下述求上、下界的一般格式．

假设把区间$[a,b]$划分成N个子区间

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b.$$

在每个子区间上我们都选$z_1(x)$是二次多项式，并选多项式的系数使$z_1(a) = \gamma_1$，$z_1'(a) = \gamma_2$以及z_1和z_1'在$[a, b]$处处连续。还有，选z_1使不等式(3)在每个子区间(x_{i-1},x_i)中成立．令

$$z_1(x) = c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i) + e_i \text{ 当 } x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1} \text{ 时},$$

$$i = 0,1,2,\cdots, N-1.$$

选取常数$c_i, d_i, e_i, i = 0, 1, \cdots, N-1$及子区间数$N$使所有要求的条件都满足．我们从区间$(x_0,x_1)$开始逐步地进行． 初始条件

$$z_1(a) = \gamma_1, \quad z_1'(a) = \gamma_2$$

要求$e_0 = \gamma_1$和$d_0 = \gamma_2$．所以在(x_0,x_1)中我们有

$$z_1(x) = c_0(x - x_0)^2 + \gamma_2(x - x_0) + \gamma_1,$$

在这个区间中，不等式

$$(L + h)[z_1] \geqslant f(x)$$

变成了

$$c_0[2 + 2g(x)(x - x_0) + h(x)(x - x_0)^2] + g(x)\gamma_2$$
$$+ h(x)[\gamma_2(x - x_0) + \gamma_1] \geqslant f(x). \tag{15}$$

若$g(x)$和$h(x)$有界，则可以选x_1充分接近x_0使得(15)中c_0的系数在$x_0 \leqslant x \leqslant x_1$上为正．此外，若$f$有界，则可取$c_0$充分大，使(15)对$(x_0,x_1)$中所有的$x$成立．

现在我们转向区间(x_1,x_2)，其中$z_1(x)$由

$$z_1(x) = c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1) + e_1 \text{ 当 } x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \text{ 时}$$

定义．为保证z_1和z_1'在x_1的连续性，选取

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= c_0(x_1 - x_0)^2 + \gamma_2(x_1 - x_0) + \gamma_1, \\ d_1 &= 2c_0(x_1 - x_0) + \gamma_2. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

在区间(x_1,x_2)中与(15)相应的不等式变成

$$c_1[2 + 2g(x)(x - x_1) + h(x)(x - x_1)^2] + g(x)d_1$$
$$+ h(x)[d_1(x - x_1) + e_1] \geqslant f(x), \tag{17}$$

其中d_1和e_1是由(16)确定的常数．我们选取x_2充分接近x_1，使

(17) 中 c_1 的系数为正. 然后选 c_1 充分大使不等式 (17) 在区间 (x_1, x_2) 到处成立.

这样继续下去,我们确定每个 d_i, e_i 使 z_1 和 z_1' 处处连续,并且始终把区间 (x_i, x_{i+1}) 取得充分小而把常数 c_i 取得充分大, 使得 $(L+h)[z_1] \geqslant f(x)$ 处处成立. 事实上, 量 e_i, d_i 可由递推公式

$$e_i = c_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + d_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + e_{i-1},$$
$$d_i = 2c_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + d_{i-1}$$

确定. 为确定 c_i, 在实际计算中采用以下方法是方便的: 在第 i 个子区间中用 f 的最大值来代替 f, 并用 g 和 h 的最大值或最小值来代替 g 和 h,它们中无论那个都适合于使 $(L+h)[z_1] \geqslant f$ 处处成立.

用类似的办法可以构造下界. 这时常数 d_i, e_i 用完全同样的方法来选取, 而把量 $-c_i$ 取得充分大使 $(L+h)[z_2] \leqslant f(x)$ 处处成立.

如果 f, g 和 h 都连续, 则可以证明: 当子区间的最大长度趋于零时,上、下界都趋向解 u.

在本节中到这里为止我们假设了 $h(x) \leqslant 0$. 现在我们要讨论函数 $h(x)$ 可以为正时方程

$$(L+h)[u] = u'' + g(x)u' + h(x)u = f(x)$$

以及初始条件

$$u(a) = \gamma_1, \quad u'(a) = \gamma_2$$

的解的逼近问题. 这里要利用定理 5 中给出的广义最大值原理. 为此,我们假设存在一个函数 w, 它在 $[a, b]$ 上为正, 并具有性质

$$(L+h)[w] \leqslant 0 \quad 当 a < x < b 时.$$

例如,函数

$$w = 1 - \beta(x-a)^2,$$

其中 β 充分大[假定 $f(x)$ 有界], 当区间 $[a, b]$ 足够小时就有所要求的性质.

在第二节中我们看到 $v = u/w$ 满足形状为

$$(\bar{L}+H)[v] \equiv v'' + G(x)v' + H(x)v = \frac{f}{w}$$

的方程，其中 $G(x) \equiv (2w'/w) + g$ 而 $H(x) \equiv (L+h)[w]/w \leqslant 0$。现在定义比较函数 $z_1(x)$ 和 $z_2(x)$ 使 z_1/w 和 z_2/w 给出 u/w 的界。我们使 z_1 和 z_2 满足不等式

$$(L+h)[z_1] \geqslant f(x),$$
$$z_1(a) \geqslant \gamma_1,\ z_1'(a)w(a) - z_1(a)w'(a) \geqslant \gamma_2 w(a) - \gamma_1 w'(a)$$

以及

$$(L+h)[z_2] \leqslant f(x),$$
$$z_2(a) \leqslant \gamma_1, z_2'(a)w(a) - z_2(a)w'(a) \leqslant \gamma_2 w(a) - \gamma_1 w'(a).$$

于是，在 $x = a$ 处

$$\frac{z_2}{w} \leqslant \frac{u}{w} \leqslant \frac{z_1}{w} \text{ 和 } \left(\frac{z_2}{w}\right)' \leqslant \left(\frac{u}{w}\right)' \leqslant \left(\frac{z_1}{w}\right)'.$$

而且，通过计算容易看出

$$(\bar{L}+H)\left[\frac{z_2}{w}\right] \leqslant (\bar{L}+H)\left[\frac{u}{w}\right] \leqslant (\bar{L}+H)\left[\frac{z_1}{w}\right].$$

因此，我们发现当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时

$$\frac{z_2}{w} \leqslant \frac{u}{w} \leqslant \frac{z_1}{w}$$

和

$$\left(\frac{z_2}{w}\right)' \leqslant \left(\frac{u}{w}\right)' \leqslant \left(\frac{z_1}{w}\right)'.$$

这组不等式的头一个给出了界

$$z_2(x) \leqslant u(x) \leqslant z_1(x). \tag{18}$$

第二个给出

$$w(x)z_2'(x) - z_2(x)w'(x) \leqslant w(x)u'(x) - u(x)w'(x)$$
$$\leqslant w(x)z_1'(x) - z_1(x)w'(x).$$

由于 w 在 $[a,b]$ 上为正，我们得到

$$z_2'(x) + \frac{w'(x)}{w(x)}[u(x) - z_2(x)] \leqslant u'(x) \leqslant z_1'(x)$$

$$-\frac{w'(x)}{w(x)}[z_1(x)-u(x)]. \tag{19}$$

如果 $w'(x)\leqslant 0$，则可把(18)中给出的 $u(x)$ 的上界代入(19)的左端，把下界代入右端．如果 $w'(x)\geqslant 0$，则在左端利用下界，在右端利用上界．这样一来，我们求得

$$\left.\begin{aligned}&z_2'(x)-\frac{[-w'(x)]}{w(x)}[z_1(x)-z_2(x)]\leqslant u'(x)\\&\leqslant z_1'(x)+\frac{[-w'(x)]}{w(x)}[z_1(x)-z_2(x)]\ \text{当}\ w'(x)\leqslant 0\ \text{时},\\&z_2'(x)\leqslant u'(x)\leqslant z_1'(x)\ \text{当}\ w'(x)\geqslant 0\ \text{时}.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

不等式(18)和(20)给出了 $u(x)$ 和 $u'(x)$ 的界，当 $z_1(x)-z_2(x)$ 和 $z_1'(x)-z_2'(x)$ 很小时，它们是精确的．

虽然求一个在充分小的区间上满足 $(L+h)[w]\leqslant 0$ 的正函数 w 总是可能的，但是一般说来，如果区间太大了，这样的函数就不存在．因而，我们再一次采取分割区间的方法，把定义在子区间上的函数拼接起来．设 $w>0$ 并在区间 $[a,x^*]$ 上 $(L+h)[w]\leqslant 0$，又设 w^* 是在区间 $[x^*,b]$ 上满足 $(L+h)[w^*]\leqslant 0$ 的另一个正函数．我们希望求出全区间 $[a,b]$ 上初值问题(1)，(2)的解 u 的界来．

设 $z_1(x)$ 和 $z_2(x)$ 在区间 $[a,x^*]$ 上满足条件

$$(L+h)[z_2]\leqslant f(x)\leqslant(L+h)[z_1],$$

并且

$$z_2(a)\leqslant\gamma_1\leqslant z_1(a),$$
$$z_2'(a)w(a)-z_2(a)w'(a)\leqslant\gamma_2 w(a)-\gamma_1 w'(a)$$
$$\leqslant z_1'(a)w(a)-z_1(a)w'(a).$$

于是

$$z_2\leqslant u\leqslant z_1,$$

$$\left(\frac{z_2}{w}\right)'\leqslant\left(\frac{u}{w}\right)'\leqslant\left(\frac{z_1}{w}\right)'\quad\text{当}\ a\leqslant x\leqslant x^*\ \text{时}.$$

这样一来就给出了 $u(x^*)$ 和 $u'(x^*)$ 的界，此外，还给了在 $[x^*,b]$ 上满足 $(L+h)[w^*]\leqslant 0$ 的函数 w^*. 那么，我们能够如前求得 u/w^* 和 $(u/w^*)'$ 的界。 设 z_1^* 和 z_2^* 是定义在 $[x^*,b]$ 上的函数，又假设它们满足

$$(L+h)[z_2^*]\leqslant (L+h)[u]\leqslant (L+h)[z_1^*] \text{ 在}(x^*,b)\text{中},$$
$$z_2^*(x^*)\leqslant u(x^*)\leqslant z_1^*(x^*),$$
$$\left(\frac{z_2^*}{w^*}\right)'\leqslant\left(\frac{u}{w^*}\right)'\leqslant\left(\frac{z_1^*}{w^*}\right)' \text{ 在 } x=x^*,$$

于是，如前所作，我们得到

$$z_2^*(x)\leqslant u(x)\leqslant z_1^*(x),$$
$$\left(\frac{z_2^*}{w^*}\right)'\leqslant\left(\frac{u}{w^*}\right)'\leqslant\left(\frac{z_1^*}{w^*}\right)' \text{ 当 } x^*\leqslant x\leqslant b \text{ 时}.$$

虽然我们不知道 $u(x^*)$ 和 $(u/w^*)'$ 在 x^* 的值，但有它们的界，所以，我们可以给出保证上述不等式都得到满足的关于 z_1^*, $(z_1^*)'$, z_2^* 和 $(z_2^*)'$ 在 x^* 的值的显式条件.

如果 $w^{*\prime}/w^*\geqslant w'/w$（通常是这种情形），这些条件是

$$z_1^*\geqslant z_1,\ w^*\left(\frac{z_1^*}{w^*}\right)'\geqslant w\left(\frac{z_1}{w}\right)'-\left(\frac{w^{*\prime}}{w^*}-\frac{w'}{w}\right)z_2 \text{ 在 } x=x^*,$$

$$z_2^*\leqslant z_2,\ w^*\left(\frac{z_2^*}{w^*}\right)'\leqslant w\left(\frac{z_2}{w}\right)'-\left(\frac{w^{*\prime}}{w^*}-\frac{w'}{w}\right)z_1 \text{ 在 } x=x^*.$$

如果 $w^{*\prime}/w^*\leqslant w'/w$，在第一行的不等式中我们用 z_1 来代替 $(w^{*\prime}/w^*-w'/w)$ 的系数 z_2，而在第二行中用 z_2 代替 z_1. 如果这些条件都满足，我们就有估计

$$z_2^*(x)\leqslant u(x)\leqslant z_1^*(x),$$
$$\left(\frac{z_2^*}{w^*}\right)'\leqslant\left(\frac{u}{w^*}\right)'\leqslant\left(\frac{z_1^*}{w^*}\right)'.$$

我们现在把 w^* 作为 w 在区间 $(x^*,b]$ 的延拓，z_1^* 作为 z_1 的延拓，z_2^* 作为 z_2 的延拓. 于是，一般说来这些延拓后的函数在 x^* 不连续，然而，上述在 x^* 处联系 w, w^*, z_1, z_2, z_1^* 和 z_2^* 的不等式建立了不连续点处左、右极限间的关系. 当然，把区间 $[a,b]$ 分成比

两个更多的子区间很可能是必要的或合乎需要的.

这样,上面的讨论导致以下定理:

定理 14. 设 $z_1(x)$, $z_2(x)$ 和 $w(x)$ 是 $[a,b]$ 上有分段连续的一、二阶导数的分段连续函数,它们有性质:

(a) 在$[a,b]$上 $w>0$,

(b) $z_2(a)\leqslant\gamma_1\leqslant z_1(a)$,

(c) $z_2'(a)w(a)-z_2(a)w'(a)\leqslant\gamma_2 w(a)-\gamma_1 w'(a)$
$\leqslant z_1'(a)w(a)-z_1(a)w'(a)$.

(d) $(L+h)[w]\leqslant 0,(L+h)[z_2]\leqslant f(x)\leqslant(L+h)[z_1]$
在出现于这些公式中的导数连续的所有点上成立.

(e) 在每个不连续点 x^* 处,函数 z_1, $-z_2$ 和 w'/w 都有非负的跳跃,$w(z_1/w)'$ 的跳跃至少是 w'/w 的跳跃的 $-z_2(x^*-0)$ 倍,而 $w(z_2/w)'$ 的跳跃至多是 w'/w 的跳跃的 $-z_1(x^*-0)$倍.

那么在 $[a,b]$ 上

$$z_2(x)\leqslant u(x)\leqslant z_1(x),$$

$$\left[\frac{z_2(x)}{w(x)}\right]'\leqslant\left[\frac{u(x)}{w(x)}\right]'\leqslant\left[\frac{z_1(x)}{w(x)}\right]'.$$

附注. (i) 在每个使 z_1 和 w 连续的区间中,从 z_1 减去 w 的适当倍数可使 $z_1(a)=\gamma_1$,并使 z_1 在$[a,b]$上到处连续,这就改进了上界. 类似可使 $z_2(a)=\gamma_2$ 且 z_2 连续.

(ii) 选取 $w\equiv 1$ 就能够得到前面当 $h\leqslant 0$ 的结果.

例. 求

$$(L+h)[u]=u''+(4+x)u=0$$

的满足初始条件

$$u(0)=0,\quad u'(0)=1$$

的解在 $x=1$ 的值的上、下界.

首先注意 $h(x)=4+x$ 在$[0,1]$上是正的,所以我们要寻求

一个辅助函数 $w(x)$。我们看出当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ 时

$$w = 1 - 2.1x^2$$

是正的并满足 $(L+h)[w] \leqslant 0$。在这个区间上，函数

$$z_1 = x,$$

$$z_2 = x - \frac{18}{19}x^2$$

满足上、下比较函数所需要的条件。从(18)和(20)我们得到

$$\frac{5}{19} \leqslant u\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2},$$

$$-\frac{359}{361} \leqslant u'\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{739}{361}.$$

在区间$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$上，可取

$$w = 1 - \frac{5}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

以及

$$z_1 = -\frac{9}{8}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{739}{361}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2},$$

$$z_2 = -\frac{45}{76}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{359}{361}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{19}.$$

于是，我们求得

$$-0.38 \leqslant u(1) \leqslant 1.24,$$

实际上 $u(1) = -0.09$.

和 h 非正的方程情况一样，把给定区间分割成更多的部分我们就能得到更精确的界.

定理 14 可用来证明初值问题 (1), (2) 的解连续依赖于数据 γ_1, γ_2 和 $f(x)$.

在区间 $[a+(k/2\beta), a+(k+1)/2\beta]$ 上，$k=0,1,\cdots,k^*$，其中 $k^* < 2\beta(b-a) \leqslant k^*+1$，我们令 $w = 1 - \beta^2[x -$

$a-(k/2\beta)]^2$，这里 β 充分大使得

$$(L+h)[w]=-2\beta^2\left[1+\left(x-a-\frac{k}{2\beta}\right)g\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(x-a-\frac{k}{2\beta}\right)^2 h\right]+h\leqslant 0$$

在该区间上成立．只要 $\max h>0$，而让

$$\beta^2=\frac{1}{4}\max_{a\leqslant x\leqslant b}[g^2+3h]$$

就能做到这一点．如果 $h\leqslant 0$，我们令 $\beta=0$ 所以 $w\equiv 1$． 在第一个区间 $[a,a+(1/2\beta)]$ 上，选取

$$z_1=C_0e^{\alpha(x-a)},$$

其中 α 选得使

$$(L+h)[e^{\alpha(x-a)}]=(\alpha^2+\alpha g+h)e^{\alpha(x-a)}\geqslant 1,$$

例如，我们可取

$$\alpha=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|g^2-2(h-1)|^{1/2}.$$

我们再取

$$C_0=\max\left[|\gamma_1|,\frac{|\gamma_2|}{\alpha},\ \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\right].$$

于是 $z_1=C_0e^{\alpha(x-a)}$ 满足定理 14 中所说的 z_1 的条件，并且 $z_2=-C_0e^{\alpha(x-a)}$ 在区间 $[a,a+(1/2\beta)]$ 上也满足 z_2 的条件． 在 $x=a+(1/2\beta)$ 处我们求得

$$|u|\leqslant C_0e^{\alpha/2\beta}$$

$$\left|\left(\frac{u}{w}\right)'\right|\leqslant\frac{\frac{3}{4}\alpha+\beta}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}C_0e^{\alpha/2\beta},$$

所以

$$\left|u'\left(a+\frac{1}{2\beta}\right)\right|\leqslant\left(\alpha+\frac{8\beta}{3}\right)C_0e^{\alpha/2\beta}.$$

现在，在 $[a+(1/2\beta),\ a+(2/2\beta)]$ 上我们令 $z_1=-z_2=$

$C_1 e^{\alpha[x-a-(1/2\beta)]}$，其中

$$C_1 = \left(1 + \frac{8\beta}{3\alpha}\right) C_0 e^{\alpha/2\beta}.$$

并求得

$$\left|u\left(a + \frac{2}{2\beta}\right)\right| \leqslant \left(1 + \frac{8\beta}{3\alpha}\right) C_0 e^{2\alpha/2\beta},$$

$$\left|u'\left(a + \frac{2}{2\beta}\right)\right| \leqslant \alpha\left(1 + \frac{8\beta}{3\alpha}\right)^2 C_0 e^{2\alpha/2\beta}.$$

照这样继续进行，我们对$[a,b]$中所有的 x 得到

$$|u(x)| \leqslant C_3 e^{\rho(x-a)},$$

$$|u'(x)| \leqslant \alpha\left(1 + \frac{8\beta}{3\alpha}\right) C_0 e^{\rho(x-a)},$$

其中 $\rho = \alpha + 2\beta \log[1 + (8\beta)/(3\alpha)]$.

如果 u_1，u_2 是同一个微分算子 L 在彼此接近的数据下初值问题的解，我们令 $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ 就可得到

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leqslant C_0 e^{\rho(x-a)},$$

$$|u_1'(x) - u_2'(x)| \leqslant \alpha C_0\left(1 + \frac{8\beta}{3\alpha}\right) e^{\rho(x-a)},$$

其中 α,β 和 ρ 只依赖 g 和 h 的界，而

$$C_0 = \max\left\{|u_1(a) - u_2(a)|, \frac{|u_1'(a) - u_2'(a)|}{\alpha},\right.$$

$$\left.\max_{a\leqslant x\leqslant b} |(L+h)[u_1] - (L+h)[u_2]|\right\}.$$

因此，如果初值 $u_1(a)$，$u_1'(a)$ 与 $u_2(a)$，$u_2'(a)$ 接近，又若给定函数 $(L+h)[u_1]$ 和 $(L+h)[u_2]$ 彼此接近，则 C_0 是小量；所以在整个区间 $[a,b]$ 上，$u_1(x)$ 接近 $u_2(x)$，$u_1'(x)$ 接近 $u_2'(x)$. 换句话说，初值问题(1)，(2)的解 u 连续依赖于数据 γ_1,γ_2 和 $f(x)$.

习　　题

1. 如果当 $x > 0$ 时 $u'' - e^x u = 0$,

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$$

求 $u(1)$ 和 $u'(1)$ 的上、下界.

2. 如果当 $x > 0$ 时 $u'' + xu' - x^2u = 1$,

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0,$$

求 $u(1)$ 和 $u'(1)$ 的上、下界.

3. 如果当 $x > 0$ 时 $u'' + (10 + x^2)u = 0$,

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = -1,$$

求 $u(1)$ 和 $u'(1)$ 的上、下界.

4. 把区间[0,1]分割成三部分，求定理 13 之后例题中 $u(1)$ 的改进了的上、下界.

5. 把区间[0,1]分割成三部分求在定理 14 之后例题中 $u(1)$ 的改进了的上、下界.

6. 假设 u 是 $u'' + g(x)u' + h(x)u = f(x)$ 的解，又设 g, h 和 f 单边有界. 即假设 $-\infty < g(x) \leqslant M$ 或假设 $m \leqslant g(x) < \infty$，但不是二者都成立;类似地假设 h 和 f 单边有界. 试分开考虑 g, h 和 f，说明在无界的情形定理 13 和 14 的那些部分仍然成立,并在适当条件下得出单边不等式.

第七节 特征值问题

假设 u 是方程

$$u'' + g(x)u' + [h(x) + \lambda k(x)]u = 0 \quad 当\ a < x < b\ 时 \tag{1}$$

的满足边界条件

$$\left.\begin{aligned} -u'(a)\cos\theta + u(a)\sin\theta = 0, \\ u'(b)\cos\phi + u(b)\sin\phi = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

的解. 我们取 θ 和 ϕ 使 $-\pi/2 < \theta \leqslant \pi/2$, $-\pi/2 < \phi \leqslant \pi/2$. 显然,对 λ 的每个值 $u \equiv 0$ 满足(1)和(2). 使(1),(2)有不恒等于零的解的任一数 λ 称为方程(1)与边界条件(2)的一个**特征值**. 对应的解 u 称为**特征函数**. 因为当 u 是(1), (2)的解时，对任何数 A，函数 Au 也满足(1),(2). 所以这种解仅在乘以常数的范围内被确定.

我们将假设函数 g, h 和 k 有界,并且存在正数 η 使得

$$k(x) \geqslant \eta > 0 \quad 当 a \leqslant x \leqslant b 时.$$

如果 λ 充分小(可能为负),则

$$h + \lambda k \leqslant 0 \quad 当 a \leqslant x \leqslant b 时;$$

如果还有 $\theta \geqslant 0, \phi \geqslant 0$,从第五节的定理 10 可推得这样的 λ 不可能是特征值. 也就是说,(1),(2)所有的特征值都大于数[1]

$$\inf_{a \leqslant x \leqslant b} \left[\frac{-h(x)}{k(x)} \right]. \tag{3}$$

现在我们要求出(1),(2)的特征值的更一般的下界. 设 $w(x)$ 是$[a,b]$上二次连续可微的正函数,并满足不等式

$$\left. \begin{aligned} -w'(a)\cos\theta + w(a)\sin\theta \geqslant 0, \\ w'(b)\cos\phi + w(b)\sin\phi \geqslant 0. \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

如果 w 还满足

$$w'' + g(x)w' + [h(x) + \lambda k(x)]w < 0, \tag{5}$$

则从第五节定理 11(取 $z_1 = z_2 = 0$) 推得 λ 不是特征值,这样就得出了以下结果.

定理 15. 如果 $w(x)$ 在 $[a,b]$ 为正,并且满足不等式(4),则(1),(2)的特征值不可能小于量

$$\inf_{a \leqslant x \leqslant b} \left[-\frac{w'' + g(x)w' + h(x)w}{k(x)w} \right]. \tag{6}$$

注意若 $\theta \geqslant 0$, $\phi \geqslant 0$, 则(6)是(3)的一个改进. 因为函数 $w \equiv 1$ 满足所有的假设,而在这种情形下(6)化为(3).

现将证明最大值原理可用来建立最小的或第一个特征值的存在性, 即我们要证明存在数 λ_1, 它是一个特征值并有性质: 小于 λ_1 的数 λ 都不可能是特征值. 为此,我们先建立下列引理.

引理 1. 对每一λ,设 $r(x;\lambda)$ 是初值问题

$$\left. \begin{aligned} &(L + h + \lambda k)[r] = r'' + g(x)r' + [h(x) + \lambda k(x)]r = 0, \\ &r(a) = \cos\theta, \quad r'(a) = \sin\theta \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

1) 如果函数 $f(x)$ 达到它的最小值,则它的下确界 $\inf f(x)$ 就是它的最小值,否则 $\inf f(x)$ 就是 $f(x)$ 的最大下界. 上确界 $\sup f(x)$ 可类似定义,所以 $\sup f(x) = -\inf[-f(x)]$.

的解，其中$-\pi/2 < \theta \leqslant \pi/2$. 假设 $g(x)$, $h(x)$和 $k(x)$ 有界，并且 $k(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正下界，则存在一数 $\bar{\lambda}$ 使得对所有的 $\lambda > \bar{\lambda}$ 解 $r(x;\lambda)$ 必在 $a < x < b$ 中变号.

证明. 假设对任意大的 λ 都存在一个 r，满足(7)并在(a,b)中使 $r(x;\lambda) > 0$，那么，只要 $c - \varepsilon > a$ 和 $c + \varepsilon < b$ 就可以利用函数 $w(x) \equiv r(x;\lambda)$ 对问题

$$(L + h + \lambda k)[u] = 0 \quad 当\ c - \varepsilon < x < c + \varepsilon,$$
$$u(c - \varepsilon) = u(c + \varepsilon) = 0$$

建立定理 11. 这个问题显然有解 $u \equiv 0$. 构造一个函数 z_2，使得如果第五节定理 11 成立，z_2 就可以用来作下界，但 z_2 显然大于 u，这样我们将得出矛盾. 令

$$z_2(x) \equiv e^{-\alpha(x-c)^2} - e^{-\alpha\varepsilon^2},$$

其中 α 是待定正常数，我们看到

$$z_2(c - \varepsilon) = z_2(c + \varepsilon) = 0,$$

又算得

$$\begin{aligned}(L + h + \lambda k)[z_2] = 2\alpha[2\alpha(x - c)^2 - 1 \\ - (x - c)g(x)]e^{-\alpha(x-c)^2} \\ + (h + \lambda k)[e^{-\alpha(x-c)^2} - e^{-\alpha\varepsilon^2}].\end{aligned}$$

现取 α 充分大使得

$$\frac{1}{2}\alpha\varepsilon^2 \geqslant 1 + (x - c)g(x)$$

在区间 $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ 上成立. 于是，如果 λ 大到使 $h + \lambda k \geqslant 0$，我们就看出当 $|x - c| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon$ 时 $(L+h+\lambda k)[z_2] \geqslant 0$. 为使当 $|x - c| < \frac{1}{2}\varepsilon$ 时得到同样结论，只需简单地取 λ 大到使

$$(h + \lambda k) \geqslant 2\alpha|1 + (x - c)g(x)|/[1 - e^{-3\alpha\varepsilon^2/4}] \tag{8}$$

即可. 对于这种充分大的 λ，于是有 $(L + h + \lambda k)[z_2] \geqslant 0$；所以，如果定理 11 成立，则 $z_2 \leqslant 0$. 但是根据定义，在 $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ 中 $z_2 > 0$，所以破坏了定理 11. 因此对大到使 $h + \lambda k \geqslant 0$

及(8)成立的 λ, $r(x;\lambda)$ 在 $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ 上一定要变号. 这样一来,只要 $a < c-\varepsilon$ 和 $c+\varepsilon < b$,取

$$\bar{\lambda} = \sup_{c-\varepsilon \leqslant x \leqslant c+\varepsilon} \left[-\frac{h(x)}{k(x)} + \frac{2\alpha|1+(x-c)g(x)|}{(1-e^{-3\alpha\varepsilon^2/4})k(x)} \right],$$

就证明了引理.

附注. 对此引理,假设 $g(x)$ 有界, $h(x)$ 有下界,又 $k(x)$ 在某子区间 $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ 上有正下界就足够了.

现在来证一个反方向的引理,它描述了对于小的 λ 的情况.

引理 2. 设 $r(x;\lambda)$ 是初值问题(7)的解,则存在一数 λ', 使得当 $\lambda < \lambda'$ 时在 $a < x \leqslant b$ 中 $r(x;\lambda) > 0$ 且 $r'(b;\lambda)\cos\phi + r(b;\lambda)\sin\phi > 0$.

证明. 设 $w(x)$ 是在 $[a,b]$ 上为正的任何二次连续可微函数,它还满足

$$-w'(a)\cos\theta + w(a)\sin\theta \geqslant 0,$$
$$w'(b)\cos\phi + w(b)\sin\phi \geqslant 0.$$

令

$$\lambda' = \inf\left\{-\frac{(L+h)[w]}{kw}\right\}.$$

那么,当 $\lambda < \lambda'$ 时对于 (a,b) 中任何 c,就问题

$$(L+h+\lambda k)[u] = 0 \quad 在(a,c)中,$$
$$-u'(a)\cos\theta + u(a)\sin\theta = 0,$$
$$u(c) = 0$$

而言,函数 w 使第五节的定理 11 成立. 这个问题有解 $u \equiv 0$, 因此,如果对$(a,b]$中的某个 c, $r(c;\lambda) = 0$, 那么可从定理 11 得出对于$[a,c]$上的 x, $r(x;\lambda) \leqslant 0$. 但这与 r 的初始条件矛盾, 因为要么 $r(a;\lambda) = \cos\theta > 0$ 要么 $r(a;\lambda) = 0, r'(a;\lambda) = 1$. 所以当 $\lambda < \lambda'$ 时函数 $r(x;\lambda)$ 在$(a,b]$中不能为零.

此外,把定理 11 用于问题

$$(L+h+\lambda k)[u]=0,$$
$$-u'(a)\cos\theta+u(a)\sin\theta=0,$$
$$u'(b)\cos\phi+u(b)\sin\phi=0,$$
可以证明：如果 $r'(b;\lambda)\cos\phi+r(b;\lambda)\sin\phi\leqslant 0$，则 $r(x;\lambda)\leqslant 0$。因此，当 $\lambda<\lambda'$ 时在 $(a,b]$ 中我们有 $r(x;\lambda)>0$ 和 $r'(b;\lambda)\cos\phi+r(b;\lambda)\sin\phi>0$。

借助上面的引理我们可以建立关于特征值问题(1)，(2)的以下结果。

定理 16. 存在一个特征值 λ_1 及对应的一个特征函数 $r(x;\lambda_1)$ 使得：(i)数 $\lambda<\lambda_1$ 不是特征值，并且(ii) $r(x;\lambda_1)$ 在(a,b)中不变号。

证明. 设 λ^* 是使 $r(x;\lambda)>0$ 在 $(a,b]$ 中成立的 λ 值的最小上界。从两个引理知道这样的 λ^* 存在，且 $\lambda'\leqslant\lambda^*\leqslant\bar{\lambda}$。

注意对任何数 λ 及 μ，差 $q(x)=r(x;\lambda)-r(x;\mu)$ 满足初值问题
$$(L+h+\lambda k)[q]=(\mu-\lambda)kr(x;\mu),$$
$$q(a)=0,\quad q'(a)=0.$$
从第六节的结果知，当 $|\lambda-\mu|$ 是小量时，$q(x)$ 和 $q'(x)$ 都一致地小，即 $r(x;\lambda)$ 和 $r'(x;\lambda)$ 对 λ 连续，对 x 一致连续。于是，因为对所有的 $\lambda<\lambda^*$，$r(x;\lambda)>0$，我们得到 $r(x;\lambda^*)\geqslant 0$。此外，如果 $r(x;\lambda^*)$ 在 $(a,b]$ 上严格为正，则由连续性知对某个 $\lambda>\lambda^*$ 同样结论成立。因此，$r(x;\lambda^*)$ 必在 $(a,b]$ 中某处等于零。若它在内点 c 处等于零，我们应有 $r(c;\lambda^*)=r'(c;\lambda^*)=0$，但由定理 6 有 $r(x;\lambda^*)\equiv 0$，和初始条件矛盾。我们得到结论：在(a,b)中 $r(x;\lambda^*)>0$ 而 $r(b;\lambda^*)=0$。于是 $r'(b;\lambda^*)<0$，由此
$$r'(b;\lambda^*)\cos\phi+r(b;\lambda^*)\sin\phi\leqslant 0,$$
由引理 2 的结论想到当 $\lambda<\lambda'$ 时
$$r'(b;\lambda)\cos\phi+r(b;\lambda)\sin\phi>0.$$

因为 $r(b;\lambda)$ 和 $r'(b;\lambda)$ 都是 λ 的连续函数，我们知道一定存在一个值 λ_1，$\lambda'\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda^*$，使当 $\lambda<\lambda_1$ 时有 $r'(b;\lambda)\cos\phi+$

$r(b;\lambda)\sin\phi > 0$,而且

$$r'(b;\lambda_1)\cos\phi + r(b;\lambda_1)\sin\phi = 0.$$

那么 $r(b;\lambda_1)$ 满足特征值问题

$$(L+h+\lambda_1 k)[r]=0,$$
$$-r'(a;\lambda_1)\cos\theta + r(a;\lambda_1)\sin\theta = 0,$$
$$r'(b;\lambda_1)\cos\phi + r(b;\lambda_1)\sin\phi = 0.$$

从而 λ_1 是问题(1),(2)的特征值, $r(x;\lambda_1)$ 是它对应的特征函数.我们看到,由于 $\lambda_1 \leqslant \lambda^*$, 所以特征函数 $r(x;\lambda_1)$ 在 (a,b) 中是正的. 当且仅当 $\theta=\pi/2$ 时 $r(x;\lambda_1)$ 在点 a 等于零, 又当且仅当 $\phi=\pi/2$ 时它在点 b 等于零.

附注. (i) 对 $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ 和对任何 $\lambda < \lambda_1$, 函数 $w = r(x;\lambda)$ 满足定理 15 的所有条件. 因为 $(L+h+\lambda k)[w]=0$, 下界(6)恰好是 λ. 对 $\theta=\pi/2$ 和 $\lambda<\lambda_1$, 我们选取 $w(x)=r(x;\lambda)+s(x;\lambda)$, 其中 $s(x;\lambda)$ 是 (a,b) 中在 b 处的类似初值问题的解. 下界还是 λ. 所以, 在所有的情况下, 通过适当选择函数 w 可以使下界任意接近 λ_1. 特别由此推出 λ_1 就是该问题的最小特征值.

(ii) 根据上面的附注,如果 λ_1 为正,则函数 $w=r(x;0)$ [若 $\theta=\pi/2$, 则 $w=r(x;0)+s(x;0)$] 满足第五节中定理 11 的条件.

(iii) 如果 $\lambda_1 \leqslant 0$ 且 w 在 $[a,b]$ 上为正,则

$$(L+h+\lambda_1 k)[w] \leqslant (L+h)[w].$$

这样一来, 假如 w 对算子 $L+h$ 满足定理 11 的假设, 则它也对 $L+h+\lambda_1 k$ 满足同样条件. 在定理 11 中选取 $z_1 \equiv z_2 \equiv 0$, 我们看出当 $\lambda=\lambda_1$ 时 $u\equiv 0$. 这与 λ_1 是特征值的事实矛盾. 我们得到结论: 若 $\lambda_1 \leqslant 0$,则不存在满足定理 11 中所要求的条件的函数.

附注 (ii) 和 (iii) 构成了以下结论的内容.

定理 17. 当且仅当问题(1),(2)的最小特征值 λ_1 为正时，定理 11 中所说的边值问题的上、下界估计才成立.

我们注意对应于大于 λ_1 的特征值的特征函数不可能在 (a,b) 中同号. 因为,若当 $\lambda_k > \lambda_1$ 时 $r(x;\lambda_k)$ 为正，把定理 3 和 4 用到量 $r(x;\lambda_1)/r(x;\lambda_k)$ 上就会得出矛盾.

习　　题

1. 求问题

$$u'' + xu' + \lambda(1 + x^2)u = 0 \quad \text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时},$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

的最小特征值的下界.

2. 求问题

$$u'' - u' + u + \lambda(1 + x^2)u = 0 \quad \text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时},$$
$$-u'(0) + u(0) = 0,$$
$$u'(1) + u(1) = 0$$

的最小特征值的下界.

3. 求问题

$$u'' + xu' + \lambda(1 + x^2)u = 0 \quad \text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时},$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

的最小特征值的上界.

4. 考虑两个问题

$$(L + h + \lambda k)[u] \equiv u'' + g(x)u' + [h + \lambda k(x)]u = 0, \quad a < x < b,$$
$$u(a) = u(b) = 0.$$
$$(L + h + \lambda \bar{k})[\bar{u}] \equiv \bar{u}'' + g(x)\bar{u}' + [h + \lambda \bar{k}(x)]\bar{u} = 0, \quad a < x < b,$$
$$\bar{u}(a) = \bar{u}(b) = 0.$$

假设当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时 $k(x) \geqslant \bar{k}(x)$. 关于这两个问题最小特征值 λ_1 和 $\bar{\lambda}_1$ 的相对大小能得出什么结论? 试描述当函数 g 和 h 变化时最小特征值应怎样改变.

第八节　振动定理和比较定理

最大值原理可用于导出同一个方程或相关方程的解之间的关

系. 设 u 和 w 是同一个方程

$$(L+h)[u]=0,\quad (L+h)[w]=0$$

的非平凡解(即 $u\not\equiv 0, w\not\equiv 0$).

我们来建立以下的结果:

定理 18. 在函数 w 的任何两个相邻的零点之间, 函数 u 至多有一个零点.

证明. 设 a 和 b 是 w 的两个相邻的零点, 即 $w(a)=w(b)=0$, 而当 $a<x<b$ 时 $w\neq 0$. 如果有必要, 就用 $(-w)$ 代替 w, 我们可以假设在区间 (a,b) 中 $w(x)>0$. 于是函数

$$v(x)=\frac{u(x)}{w(x)}$$

满足微分方程

$$v''+2\left(\frac{w'}{w}+g\right)v'=0.$$

由定理 1 知, 除非 v 是常数(这时 u 是 w 的常数倍), 否则 v 在 (a,b) 中不可能有最大值和最小值. 出此推出 v, 从而推出 u 在开区间 (a,b) 中至多只能变号一次.

从定理 6 (第三节)所给出的初值问题的唯一性可得 u 的任何零点一定是单重的. 同一定理还证明了如果 $u(a)=0$ 或 $u(b)=0$, 则 u 一定是 w 的一个常数倍.

上面的结果称为 Sturm 振动定理. 图 3 表明同一方程的两个解的典型性态.

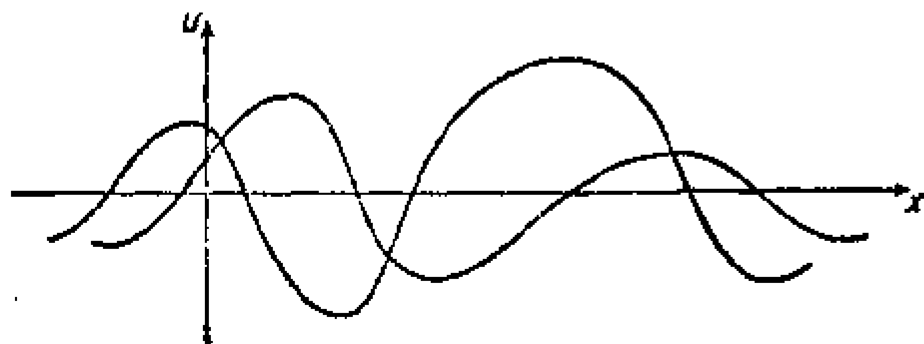


图 3

现在考虑两个相关方程的解的比较定理.

设 u 满足方程

$$(L+h_1)[u]=0,$$

而 w 满足方程

$$(L+h_2)[w]=0,$$

其中

$$h_2(x)\geqslant h_1(x)\quad 当\ a\leqslant x\leqslant b\ 时.$$

我们还假设

$$w>0\quad 当\ a<x<b\ 时.$$

由关系式

$$v=\frac{u}{w}$$

定义的函数 v 满足方程

$$v''+\left(2\frac{w'}{w}+g\right)v'+(h_1-h_2)v=0.$$

因此，v 满足最大值原理. 如果 u 在(a,b)中有两个零点，则 v 也有两个零点. 从定理 7 的唯一性结果可推出在两零点间 $v\equiv 0$. 于是，由定理 6 有 $v\equiv 0$；由此在(a,b)中 $u\equiv 0$. 这样一来，如果 u 是非平凡解，则它在(a,b)中只能有一个零点. 事实上，在闭区间$[a,b]$上同样结论也成立，除非在点 a 或 b，$w=0$.

现设 $w(a)=u(a)=0$. 按定理6，我们有 $w'(a)\neq 0$，$u'(a)\neq 0$. 从 u 和 w 的微分方程可求得

$$\frac{u''(a)}{u'(a)}=\frac{w''(a)}{w'(a)}=-g(a). \tag{1}$$

应用 L'Hôpital 法则可看出

$$v(a)=\frac{u'(a)}{w'(a)}\neq 0.$$

不失一般性我们可假设 $v(a)>0$. 为求 $v'(a)$，我们写出

$$v'(x)=\frac{wu'-uw'}{w^2}$$

应用 l'Hôpital 法则并考虑到(1),由计算知

$$v'(a) = 0.$$

假设(a,b)中有一点x_0使$v(x_0) < v(a)$。把定理4用于区间(a,x_0)就推出$v'(a) < 0$,这是一个矛盾. 这样一来我们有

$$0 < v(a) \leqslant v(x) \quad 当 a \leqslant x \leqslant b 时.$$

因此当$a < x < b$时$u(x) \neq 0$. 如果$u(b) = w(b) = 0$,用同样方法可得$u \neq 0$在(a,b)中成立. 最后,如果$w(a) = w(b) = u(a) = u(b) = 0$,根据上面的论证我们推得当$a \leqslant x \leqslant b$时$v(a) \leqslant v(x)$ 和 $v(x) \geqslant v(b)$. 因而$v(a) = v(b)$且v必是常数. 然而,仅当$h_1 - h_2 \equiv 0$时这才是可能的. 所以,我们已经证明了下述比较定理.

定理 19. 设u和w是方程

$$(L + h_1)[u] = 0, \quad (L + h_2)[w] = 0$$

的解,其中$h_2 \geqslant h_1$. 如果在开区间(a,b)中$w(x) \neq 0$,那么,除$w(a) = w(b) = 0, h_1 \equiv h_2$,以及$u$是$w$的常数倍外,$u$在闭区间$[a,b]$上至多能有一个零点.

粗略地说,定理19说明解的零点的距离随h减小而增大. 这个定理还能够用另一种形式给出,即说成:在u的任何两个相邻零点之间,函数w必有一个零点,除非$h_1 \equiv h_2$且w是u的常数倍.

推广定理19可以得出对两个不同的微分算子的比较定理. 设u是

$$(L_1 + h_1)[u] \equiv u'' + g_1 u' + h_1 u = 0$$

的解,又设w是

$$(L_2 + h_2)[w] \equiv w'' + g_2 w' + h_2 w = 0$$

的解. 我们假设g_1和g_2连续可微. 利用关系式

$$\bar{u}(x) = u(x) e^{(1/2)\int_a^x [g_1(\xi) - g_2(\xi)] d\xi} \tag{2}$$

引进函数$\bar{u}(x)$,我们发现$\bar{u}$满足方程

$$(L_2 + H)[\bar{u}] \equiv \bar{u}'' + g_2 \bar{u}' + H(x)\bar{u} = 0$$

其中

$$H(x)=\frac{1}{2}\ [g_2'(x)-g_1'(x)]+\frac{1}{4}\ \{[g_2(x)]^2-[g_1(x)]^2\}$$

$$+h_1(x).$$

如果

$$h_2(x)\geqslant H(x),$$

那么，关于 w 和 $\bar{u}$ 的零点可以应用定理 19 的结论．因为(2)说明 u 和 $\bar{u}$ 有共同的零点，我们就得到了一个比较 $(L_1+h_1)[u]=0$ 和 $(L_2+h_2)[w]=0$ 的解的定理．特别，我们得出

定理 20．设 $u(x)$ 和 $w(x)$ 分别是

$$u''+g_1(x)u'+h_1(x)u=0$$

和

$$w''+g_2(x)w'+h_2(x)w=0$$

的解，又设

$$h_2(x)-\frac{1}{2}g_2'(x)-\frac{1}{4}[g_2(x)]^2$$

$$\geqslant h_1(x)-\frac{1}{2}g_1'(x)\ -\frac{1}{4}[g_1(x)]^2.$$

那么，如果在开区间 (a,b) 中 $w(x)\neq 0$，除非 $w(a)=w(b)=0$，

$$h_2(x)-\frac{1}{2}g_2'(x)-\frac{1}{4}[g_2(x)]^2\equiv h_1(x)-\frac{1}{2}g_1'(x)$$

$$-\frac{1}{4}[g_1(x)]^2,$$

以及 $u(x)$ 是

$$w(x)e^{-(1/2)\int_a^x[g_1(\xi)-g_2(\xi)]d\xi}$$

的常数倍，则 $u(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 中至多能有一个零点。

考虑定理 20 的以下特殊情形是有意义的．我们令

$$g_2(x)\equiv 0\quad 和\quad h_2(x)=M,$$

其中 M 是正的常数．于是

$$w = \sin\sqrt{M}(x-a)$$

是

$$w'' + Mw = 0$$

的一个解. a 和 $a+(\pi/\sqrt{M})$是函数 w 的零点. 这样一来我们得到以下结果:

推论. 如果 u 是

$$(L+h)[u] \equiv u'' + g(x)u' + h(x)u = 0$$

的一个解,其中

$$h(x) - \frac{1}{2}g'(x) - \frac{1}{4}[g(x)]^2 \leqslant M,$$

则 $u(x)$ 的零点间的距离至少是 $\pi/\sqrt{M}$. 如果 $h(x)-\frac{1}{2}g'(x)-\frac{1}{4}[g(x)]^2 \geqslant M' > 0$, 则 $u(x)$ 的相邻零点间的距离至多是 $\pi/\sqrt{M'}$.

习　　题

1. 证明方程

$$u'' + (1+e^{-x})u = 0 \quad 当 x > 0 时$$

的任何解有无穷多个零点.

2. 证明方程

$$u'' + e^{-x}u = 0$$

的任何解在区间$(0,\infty)$中至多有一个零点.

3. 比较方程

$$u'' + (x^2+2)u' + (1+x)u = 0$$

和

$$w'' + \frac{1}{2}x^2w' + (10+2x)w = 0$$

的解的零点.

4. 证明方程

$$x^2u'' + (2n+1)xu' + (n^2+a)u = 0, \quad a > 0$$

的任何解在区间(a,∞)中有无穷多个零点.

5.对各种λ的值考虑

$$u''+g(x)u'+[h(x)+\lambda k(x)]u=0$$

的解. 试描述当$\lambda\to\infty$和$\lambda\to-\infty$时这种解的性态. 对函数g,h,k需要怎样的有界性条件？

第九节 非线性算子

可以把对线性算子建立的某些结果推广到非线性算子. 设$u(x)$在区间$a\leqslant x\leqslant b$上是非线性方程

$$u''+H(x,u,u')=0 \tag{1}$$

的解. 假设函数

$$H(x,y,z),\ \frac{\partial H(x,y,z)}{\partial y},\ \frac{\partial H(x,y,z)}{\partial z}$$

在它们的整个定义域上是x,y,z的连续函数. 此外，我们假设对每个x和z

$$H(x,y_1,z)\leqslant H(x,y_2,z)\quad 当\ y_1\geqslant y_2\ 时 \tag{2}$$

或者等价地

$$\frac{\partial H}{\partial y}\leqslant 0.$$

注意若

$$H(x,u,u')=g(x)u'+h(x)u-f(x),$$

则(1)就是线性方程. 于是条件(2)变成$h(x)\leqslant 0$.

假设$w(x)$在(a,b)中满足微分不等式

$$w''+H(x,w,w')\geqslant 0. \tag{3}$$

我们考虑函数

$$v=w-u,$$

从(3)减去(1)得到

$$v''+H(x,w,w')-H(x,u,u')\geqslant 0.$$

把中值定理用于上面的H,我们发现

$$v'' + \frac{\partial H}{\partial z} v' + \frac{\partial H}{\partial y} v \geqslant 0,$$

其中晟 $\partial H/\partial y$ 和 $\partial H/\partial z$ 在 $(x, u + \alpha(w - u), u' + \alpha(w' - u'))$ 计算，而 α 是 0 和 1 之间的某数. 函数 v 满足一个线性方程，并可应用由定理 3 给出的最大值原理. 我们得到结论

定理 21. 假设当 $a < x < b$ 时

$$w'' + H(x, w, w') \geqslant u'' + H(x, u, u'), \tag{4}$$

其中 $H, \partial H/\partial y, \partial H/\partial z$ 连续，且 $\partial H/\partial y \leqslant 0$. 如果 $w(x) - u(x)$ 在(a, b)中达到非负最大值 M，则

$$w(x) - u(x) \equiv M.$$

注意若 H 依赖于 x 和 z 但不依赖于 y，我们就可把任一常数加到 w 上而不改变(4). 这时可以去掉定理 21 中 M 非负的假设.

定理 4 也可以用类似的方法加以推广.

我们叙述第五节中定理 10 的如下推广，而略去其证明(可遵循定理 10 证明的途径进行).

定理 22. 设 $u(x)$ 是边值问题

$$u'' + H(x, u, u') = 0 \quad \text{当 } a < x < b \text{ 时}, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} -u'(a)\cos\theta + u(a)\sin\theta &= \gamma_1, \\ u'(b)\cos\phi + u(b)\sin\phi &= \gamma_2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

的解，其中 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$，$0 \leqslant \phi \leqslant \pi/2$，且 θ 和 ϕ 不全为零. 如果 $z_1(x)$ 满足

$$z_1'' + H(x, z_1, z_1') \leqslant 0,$$
$$-z_1'(a)\cos\theta + z_1(a)\sin\theta \geqslant \gamma_1,$$
$$z_1'(b)\cos\phi + z_1(b)\sin\phi \geqslant \gamma_2,$$

又若 $z_2(x)$ 满足

$$z_2'' + H(x, z_2, z_2') \geqslant 0,$$
$$-z_2'(a)\cos\theta + z_2(a)\sin\theta \leqslant \gamma_1,$$
$$z_2'(b)\cos\phi + z_2(b)\sin\phi \leqslant \gamma_2,$$

则上、下界的估计式

$$z_2(x) \leqslant u(x) \leqslant z_1(x)$$

成立.

这个定理蕴涵了满足边界条件(6)的(5)的解必唯一. 因为，如果 u 和 $\tilde{u}$ 都是解，我们可令 $z_1 = z_2 = \tilde{u}$ 而得出 $u \equiv \tilde{u}$. 举例说明可以怎样利用定理 22 来得到(5)的解的数值界.

例. 求

$$u'' - u^3 = 0 \quad 当 0 < x < 1 时$$

的满足边界条件

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

的解 $u(x)$ 的界.

我们选取

$$z_1 = x, z_2 = x^{(1+\sqrt{5})/2}.$$

于是

$$z_1'' - z_1^3 = -x^3 \leqslant 0,$$

$$z_2'' - z_2^3 = x^{-(3-\sqrt{5})/2} - x^{3(1+\sqrt{5})/2} \geqslant 0.$$

所以

$$x^{(1+\sqrt{5})/2} \leqslant u(x) \leqslant x.$$

我们还可以得到在第六节中所讲述的初值问题的一个逼近定理. 下面的结果是定理 13 的推广.

定理 23. 假设 $u(x)$ 满足

$$u'' + H(x, u, u') = 0 \tag{7}$$

和初始条件

$$u(a) = \gamma_1, \ u'(a) = \gamma_2, \tag{8}$$

$H, \partial H/\partial y, \partial H/\partial z$ 连续，而且 $\partial H/\partial y \leqslant 0$. 如果 $z_1(x)$ 满足

$$z_1'' + H(x, z_1, z_1') \geqslant 0,$$

$$z_1(a) \geqslant \gamma_1, \quad z_1'(a) \geqslant \gamma_2,$$

又若 $z_2(x)$ 满足

$$z_2'' + H(x, z_2, z_2') \leqslant 0,$$

$$z_2(a) \leqslant \gamma_1, \quad z_2'(a) \leqslant \gamma_2,$$

则我们有上、下界的估计式

$$z_2(x) + \gamma_2 - z_2(a) \leqslant u(x) \leqslant z_1(x) + \gamma_1 - z_1(a),$$
$$z_2'(x) \leqslant u'(x) \leqslant z_1'(x)$$

选取 $z_1 = z_2 = \tilde{u}$，其中 $\tilde{u}$ 是(7)，(8) 的任何别的解，于是 $\tilde{u} = u$，再次得到了问题(7),(8)解 u 的唯一性。

习　　题

1.如果 $u'' - u^3 = 0$，$0 < x < 1$，

$$u(0) = 1,\quad u'(1) = 0,$$

求 $u(1)$ 的上、下界.

2.如果 $u'' - e^u = 0$ 当 $0 < x < 1$ 时，

$$u(0) = 1,\quad u(1) = 0,$$

求 $u\left(\frac{1}{2}\right)$的上、下界.

3.如果 $u'' - u^3 = 1$ 当 $x > 0$ 时，

$$u(0) = u'(0) = 0,$$

求 $u(1)$ 的上、下界.

4.如果 $u'' - xu' - u^3 = 0$ 当 $0 < x < 1$ 时，

$$u(0) = 0,\quad u(1) = 1,$$

求 $u\left(\frac{1}{2}\right)$的上、下界.

5.证明定理 22.

文 献 注 记

关于第三和第四节中所讨论的初值和边值问题的存在性和唯一性定理可参阅，例如，Coddington 和 Levison [1]或 Hartman [1]的教科书. Hartman 还讨论了一阶常微分方程组的解的某些单调性性质.

二阶方程的比较定理已经由许多作者得到. 我们参考了上面提到的教科书和一个属于 Leighton [1] 的结果.

Collatz [4] 的书透彻地讨论了边值和初值问题中的逼近问题以及这种逼近中的误差估计，在这本书中可以找到广泛的参考文献. Szarski [5] 和 Walter[3] 的书给出了有关处理非线性方程组和高阶方程初值问题的广泛的

综述.

关于逼近的其它结果已由 Gloistehn [1], Lees [1], Muller [1], Pucci [1], Schröder [2], Szarski [1,2,5], Uhlmann [1], Walter [1,2] 和 Wazewski [1]得到.

第二章　椭圆型方程

第一节　Laplace 算子

设 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是定义在 n 维 Euclid 空间中区域 D 上的二次连续可微函数．Laplace 算子或 Δ 定义为

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

如果在区域 D 的每一点都满足方程 $\Delta u = 0$，则我们说 u 在 D 中调和，或简单地说 u 是一个调和函数．

假设 u 在 D 的一个内点有局部最大值．我们从初等微积分知道，在该点

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \cdots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

并且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \leqslant 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \leqslant 0, \cdots,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \leqslant 0.$$

所以，在局部最大值点上不等式

$$\Delta u \leqslant 0$$

必成立．上面的简单推理得出下述断言：如果在区域 D 的每一点函数 u 满足严格的不等式

$$\Delta u > 0, \tag{1}$$

则 u 不能在 D 的任何内点上达到其最大值．假设 $b_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), b_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, b_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是定义在 D 中的任何有界函数，不必对上面的论证作任何改变，就可断言：如果 u 在 D 中满足严格不等式

$$\Delta u + b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + b_n \frac{\partial u}{\partial x_n} > 0, \tag{2}$$

则 u 不能在任何内点上达到其最大值.

在考虑一维情况的第一章中，我们已经看到重要的是对非严格不等式建立最大值原理. 即将证明在关系式(1)和(2)中即使允许等号成立，上述最大值原理仍然有效. 特别是调和函数满足最大值原理.

我们首先对满足

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \geqslant 0 \tag{3}$$

的两个变量的函数来证明最大值原理. 在证明中将要用到 Laplace 算子的一些特殊性质. 往后，在考虑更一般的微分算子时，我们将会看到怎样修改第一章中的方法来导出最大值原理.

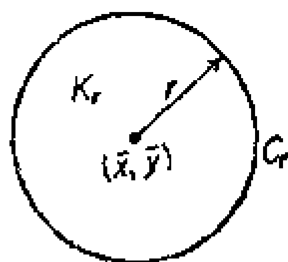


图 1

设$(\bar{x},\bar{y})$是D的一点，又设 K_r 是位于D内，中心在$(\bar{x},\bar{y})$，半径为 r 的一个圆域(图 1). 用 C_r 来记 K_r 的边界. 我们记得数量函数 v 的梯度是由

$$\operatorname{grad} v = \frac{\partial v}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \boldsymbol{j}$$

定义的向量函数，其中 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ 是平面上通常的正交单位向量. 向量函数 $\boldsymbol{w} = a(x,y)\boldsymbol{i} + b(x,y)\boldsymbol{j}$ 的散度是由公式

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}$$

定义的数量函数. 因此我们有

$$\Delta u = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, u). \tag{4}$$

在圆域 K_r 中把散度定理[1]用于 u 的 Δ 可得

$$\iint_{K_r} \Delta u dxdy = \iint_{K_r} \mathrm{div}(\mathrm{grad} u) dxdy = \oint_{C_r} \frac{\partial u}{\partial r} ds,$$

其中 s 是沿 C_r 的弧长，而 $\partial u/\partial r$ 是取在边界 C_r 上的法向导数. 在极坐标系中 $ds = rd\theta$, 所以

$$\iint_{K_r} \Delta u dxdy = r\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\theta.$$

由此可得，如果在 D 中 $\Delta u \geqslant 0$, 则

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\theta \geqslant 0. \tag{5}$$

现在我们允许 r 在 0 和一个固定数 R 之间变化，每个 K_r 都是中心在 $(\bar{x}, \bar{y})$ 的圆域. 取数 R 充分小使 K_R 完全包含在 D 中. 从 0 到 R 积分不等式(5)并交换积分次序，就得到

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\theta dr = \int_0^{2\pi} u(R, \theta) d\theta - 2\pi u(\bar{x}, \bar{y}) \geqslant 0,$$

或

$$u(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} u(R, \theta) R d\theta = \frac{1}{2\pi R}\oint_{C_R} u ds. \tag{6}$$

(6) 的右端是 u 在 C_R 上的**平均值**，而 C_R 是中心在 $(\bar{x}, \bar{y})$ 半径为 R 的圆周. 所以(6)断言：u 在 D 中任何一点的值不超过以该点为中心的 D 中任何圆周上 u 的平均值. 如果 $\Delta u = 0$, 则该不等式对 u 和 $-u$ 都成立，因此我们得到以下结果.

定理 1(平均值定理). 如果 u 在 D 中调和，则 $u(\bar{x}, \bar{y})$ 等于 u 在以 $(\bar{x}, \bar{y})$ 为中心的任何圆周上 u 的平均值，即

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2\pi R}\oint_{C_R} u ds.$$

---

1) 散度定理说：如果 D 是具有光滑边界 ∂D 的有界区域，则 $\iint_D \mathrm{div}\, w dxdy = \oint_{\partial D} w \cdot n ds$, 其中 n 是单位外法向向量. 在高维情形类似的结果成立[见第七节等式(1)].

为得到最大值原理，我们假设 u 在 D 中满足不等式(3)，并且它在 D 中某点 (x_0, y_0) 达到其最大值 M. 因为 $u \leqslant M$ 而 $u(x_0, y_0) = M$，从(6)可得，在位于 D 内的中心在 (x_0, y_0) 处的每个圆周上 u 必恒等于 M. 现在假设 D 中有一点 (x_1, y_1)，在这点 $u < M$；于是在 (x_1, y_1) 的某邻域中同样有 $u < M$. 用 D 内的一条曲线把 (x_1, y_1) 和 (x_0, y_0) 连接起来，设 (x_2, y_2) 是该曲线上使 $u = M$ 的第一个点(图 2). 那么在任何以 (x_2, y_2) 为中心的充分小的圆周上 u 不恒等于 M. 这样一来与不等式(6)矛盾，从而建立了以下结果.

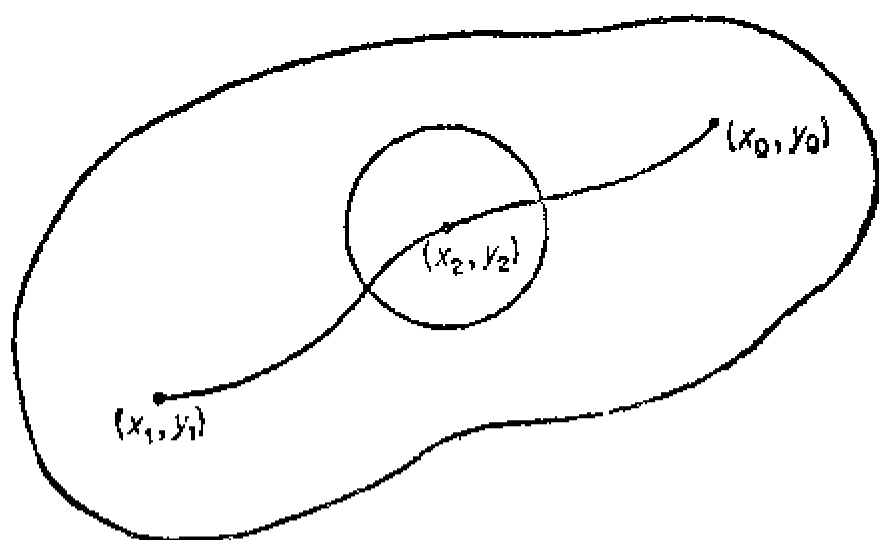


图 2

定理 2（**最大值原理**）. 设

$$\Delta u \geqslant 0 \quad 在 D 中.$$

如果 u 在 D 内任一点达到它的最大值 M，则在 D 中 $u \equiv M$.

我们没有假设区域 D 有界. 用 ∂D 表示 D 的边界，我们看到如果 u 在 $D \cup \partial D$ 连续，但不是常数，那么如果 D 有界，u 在 D 中的值就比 u 在 ∂D 上的最大值要小. 如果 D 无界，则 u 在 D 中的值或者小于 u 在 ∂D 上的最大值，或者小于当 $(x^2 + y^2)$ 趋向无穷时 u 的上极限[1].

由于对满足不等式

$$\Delta u \leqslant 0$$

1) 上极限的定义见 110 页的脚注.

的函数有对应的最小值原理（把定理 2 用于函数 $-u$ 可得），我们能够作出结论：非常数的调和函数在 D 的任何内点上既不能达到它的最大值，也不能达到它的最小值。

定义． 在区域 D 中满足 $\Delta u \geqslant 0$ 的函数 u 称为在 D 中是下调和的，或简称为下调和函数．如果 $\Delta u \leqslant 0$ 所以 $-u$ 是下调和的，我们就称 u 是上调和函数．

假设在边界为 ∂D 的区域 D 中 u 是下调和函数而 v 是调和函数，于是函数

$$w = u - v$$

在 D 中下调和．如果 u 和 v 在 ∂D 上重合，则 w 在 ∂D 上等于零，由最大值原理，w 在整个 D 上非正．因此我们得到不等式

$$u \leqslant v \quad 在 D 中.$$

下调和函数这一术语就是从刚才所说的性质得来的．下调和函数 u 在区域 D 中的值总是低于在 D 的边界上与 u 重合的调和函数的值．

在任何维数的空间中，定理 1 和 2 都有恰当的推广．设 u 是 n 个变量的下调和函数；即假设 $\Delta u \geqslant 0$．我们用 K_R 表示中心在 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$ 半径为 R 的 n 维球，并用 C_R 表示其边界．方程为

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x}_k)^2 = R^2$$

的球面 C_R 的表面积用 S_R 表示，把它写成

$$S_R = \omega_n R^{n-1}$$

是方便的，其中 ω_n 是只依赖于 n 的绝对常数．例如，$\omega_2 = 2\pi$，$\omega_3 = 4\pi$．平均值不等式断言，对下调和函数

$$u(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) \leqslant \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \oint_{C_R} u dS, \tag{7}$$

其中 dS 是 $(n-1)$ 维曲面面积元素而右端的积分是 $(n-1)$ 重积分．(7)的证明可完全遵循与(6)的证明同样的方法．n 维调和函数的平均值定理和 n 维下调和函数的最大值原理是(7)的直接推

论。

习　　题

1. 设 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^\alpha$。当 α 为何值时 u 是下调和函数？当 α 为何值时 u 是上调和函数？

2. 如果 r, θ 是平面极坐标，而 n 是整数，试证明 $r^n \cos n\theta$ 和 $r^n \sin n\theta$ 是调和函数。

3. 证明问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u^3 \quad 当 \quad x^2 + y^2 < 1 \text{ 时},$$

$$u = 0 \quad 当 \quad x^2 + y^2 = 1 \text{ 时}$$

除 $u = 0$ 外无解。

4. 设 u 是问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1 \quad 当 \quad |x| < 1, |y| < 1 \text{ 时},$$

$$u = 0 \quad 当 \quad |x| = 1, |y| = 1 \text{ 时}$$

的解。试求 $u(0,0)$ 的上、下界。

提示：考虑函数 $v = u + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$。

5. 证明 n 个变量的下调和函数的平均值不等式[公式(7)]。

第二节　二阶椭圆型算子、变换

我们将讨论形状为

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

的二阶微分算子。因为 $\partial^2/\partial x_i \partial x_j = \partial^2/\partial x_j \partial x_i$，我们可定义

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}),$$

从而把上面的微分表达式写成

$$\mathscr{L} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{1}$$

换句话说，假设二阶算子 $\mathscr{L}$ 的系数对称是不失一般性的，我们将始终这样假定。

定义. 算子(1)在点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为椭圆型的，当且仅当存在一个正量 $\mu(\boldsymbol{x})$ 使得[1)]

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j \geq \mu(\boldsymbol{x})\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \tag{2}$$

对所有的 n 维实数组 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 成立。算子$\mathscr{L}$称为在区域 D 中是椭圆型的，如果$\mathscr{L}$在 D 的每一点都是椭圆型的。$\mathscr{L}$在 D 中是一致椭圆型的，如果对 D 中每一点(2)成立并且存在一个正常数 μ_0 使得 $\mu(\boldsymbol{x}) \geq \mu_0$ 对 D 中所有的 $\boldsymbol{x}$ 成立。

用矩阵语言来说，椭圆性条件断言：对称矩阵

$$A(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

在每一点 $\boldsymbol{x}$ 正定。

我们感兴趣的是研究各种坐标变换对 $\mathscr{L}$ 的形状的影响。坐标的线性变换

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

可用矩阵记号写成

$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}.$$

在这个等式中，$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是 $n \times 1$ 矩阵，而 C 是 $n \times n$ 矩阵 (c_{ij})。$n \times n$ 矩阵 C 称为正交的，当且仅当其元素满足关系式

1) 通常如果系数 $a_{ij}(\boldsymbol{x})$ 或 $-a_{ij}(\boldsymbol{x})$ 满足不等式(2)，都把$\mathscr{L}$定义为椭圆型的。对我们来说更方便的是，假设$\mathscr{L}$已经乘上(-1)(如果必要的话)，所以(2)永远成立。

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}c_{ik}=\begin{cases}1 & 若\ j=k\\ 0 & 若\ j\neq k\end{cases},\ j,k=1,2,\cdots,n. \tag{4}$$

容易证明条件

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}c_{jk}=\begin{cases}1 & 若\ i=j\\ 0 & 若\ i\neq j\end{cases},\ i,j=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

与(4)等价．事实上，用 C^T 表示 C 的转置矩阵而用 C^{-1} 表示 C 的逆矩阵，我们看出正交性准则(4)和(5)都等价于关系式

$$C^T=C^{-1}.$$

定义. 当且仅当矩阵 $C=(c_{ij})$ 是正交矩阵时，变换(3)称为旋转或正交变换．

下面结果表明坐标的正交变换不影响算子的椭圆性．

定理 3. 假设算子

$$\mathscr{L}=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$$

是椭圆型的，则在正交变换(3)下算子 $\mathscr{L}$ 取形式

$$\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}\frac{\partial^2}{\partial y_k\partial y_l}, \tag{6}$$

其中

$$b_{kl}=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_{ki}c_{lj},\quad k,\ l=1,2,\cdots,n. \tag{7}$$

而且算子(6)是椭圆的．

证明. 因为 $\partial y_i/\partial x_j=c_{ij}$，把链锁法则用于 $\mathscr{L}$，得到

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij}c_{ki}c_{lj}\frac{\partial^2}{\partial y_k\partial y_l}.$$

用关系式(7)来定义矩阵 $B=(b_{kl})$，我们就得到形状为(6)的 $\mathscr{L}$．

为建立(6)的椭圆性，考虑任一 n 维数组 $(\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\xi_n)$ 并写出

$$\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}\xi_k\xi_l = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij}c_{ki}\xi_k c_{lj}\xi_l.$$

定义

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}\xi_k,$$

我们就有

$$\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}\xi_k\xi_l = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\eta_i\eta_j.$$

因此，由椭圆性条件(2)以及由(5)，

$$\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}\xi_k\xi_l \geqslant \mu(x)\sum_{i=1}^{n}\eta_i\eta_i = \mu(x)\sum_{i,k,l=1}^{n} c_{ki}\xi_k c_{li}\xi_l$$

$$= \mu(x)\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2.$$

附注. (i)我们指出在坐标的正交变换下不仅保持椭圆性，而且量 $\mu(x)$ 也不变.

(ii) 如果一个算子是一致椭圆型的，则在任何正交变换后它仍然是一致椭圆型的.

(iii) 为了象上面所讲地那样应用链锁法则，C的元素是常数是本质的.

(iv) 如果常系数算子在一点是椭圆型的，则它在整个 n 维空间中是一致椭圆型的. 特别，Laplace 算子处处是椭圆型的.

从线性代数中知道，对任何特定的实对称矩阵 $A=(a_{ij})$，存在一个正交矩阵 $C=(c_{ij})$，使得由

$$b_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} c_{ik}a_{kl}c_{jl}, \quad i, j = 1,2,\cdots,n$$

给出的，或等价地由

$$B = CAC^{-1}$$

给出的矩阵 $B=(b_{ij})$ 是对角形矩阵，即矩阵 B 有性质

$$b_{ij}=0 \quad 若 \ i \neq j.$$

B 的对角线元素 b_{kk} 称为原矩阵 (a_{ij}) 的特征值，而 (c_{ij}) 的每一行是对应的线性变换的特征向量.

如果在一个特定点 $\bar{x}$ 进行这样的对角化，则对所有的 n 维实数组 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 我们得到

$$\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}(\bar{x})\eta_k\eta_l = \sum_{k=1}^{n} b_{kk}(\bar{x})\eta_k^2 \geqslant \mu(\bar{x}) \sum_{k=1}^{n}\eta_k^2.$$

由此得出所有的对角元素 $b_{kk}(\bar{x})$ 都是正的. 事实上，我们有

$$b_{kk}(\bar{x}) \geqslant \mu(\bar{x}).$$

而且，如果 $\mathscr{L}$ 不是椭圆的，对任何正数 $\mu(\bar{x})$ 这样的不等式都不能成立. 因为，要是成立的话，逆变换将导出原算子的一个和椭圆性不等式一样的不等式. 所以，若 $\mathscr{L}$ 不是椭圆型的，特征值 $b_{kk}(\bar{x})$ 中至少有一个非正.

我们假设原算子 $\mathscr{L}$ 在一特定点 $\bar{x}$ 已化成对角形，在该点可把它写成

$$\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}(\bar{x}) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}.$$

现引进第二个坐标变换，它由一个"伸缩"组成. 我们令

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{b_{kk}(\bar{x})}} y_k, \ k=1,2,\cdots,n. \tag{8}$$

用原来的 $\{x_k\}$ 坐标来表示，就有

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{b_{kk}}} \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}x_j, \ k=1,2,\cdots,n.$$

它把算子化成形式

$$\mathscr{L} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_k^2}.$$

仅当所有的 $b_{kk}(\bar{x})$ 都为正时才能施行变换(8). 于是我们建立了

下面的结果.

定理 4. 二阶算子 $\mathscr{L}$ 在一点 $\bar{x}$ 是椭圆的，当且仅当存在线性变换

$$z_k = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}x_j,\ k = 1,2,\cdots,n.$$

使得在点 $\bar{x}$, $\mathscr{L}$ 变成 $\{z_k\}$ 坐标系中的 Laplace 算子.

应该强调的是我们已始终假设 (d_{kj}) 是常数矩阵，所以，这样的约化只是在一特定点 $\bar{x}$，而不是在整个区域上[1]实现的.

算子

$$(L + h) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + h$$

在 $\bar{x}$ 点称为椭圆型的，当且仅当

$$\mathscr{L} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

在该点是椭圆型的. $(L + h)$ 在 D 中是**一致椭圆型的**，如果 $\mathscr{L}$ 在 D 中是一致椭圆型的. 算子 $\mathscr{L}$ 称为 $L + h$ 的**主部**.

习　　题

1. 验证下列矩阵是正交矩阵

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.\quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{(c)}\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

1) 可以证明，一般说来，在整个区域上通过一坐标变换把二阶椭圆型算子化成 Laplace 算子是不可能的.

2. 试证明当 $x^2+y^2<1$ 时算子

$$L[u]\equiv(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(1-y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

是椭圆型的，但不是一致椭圆型的。

3. 求坐标变换 $(x,y)\to(\xi,\eta)$，它把第 2 题中的算子 L 在一特定点$(\bar{x},\bar{y})$化为 Laplace 算子。

4. 求把算子

$$L[u]\equiv 5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$$

化为 Laplace 算子的变换。

第三节　E. Hopf 的最大值原理

考虑区域D中的严格微分不等式

$$L[u]=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}>0, \tag{1}$$

假设L在D中是椭圆型的．如果u在一点$\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)$处有相对最大值，我们从多元微积分知道在$\bar{x}$处对由坐标$x_1,x_2,\cdots,x_n$通过线性变换而得的任何坐标 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 有

$$\frac{\partial u}{\partial z_k}=0\quad 且\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z_k^2}\leqslant 0, k=1,2,\cdots,n.$$

特别，若L的主部$\mathscr{L}$ 在 z-坐标系中是 Laplace 算子，则(1)在$\bar{x}$不能成立．只要L是椭圆型的，我们总可以找到一个线性坐标变换使算子$\mathscr{L}$ 在点$\bar{x}$变成 Laplace 算子．于是，我们得到结论：**若L是椭圆型的，则在区域D中满足(1)的函数u在D中不可能有最大值.**

和一维情形一样，我们要把这个最大值原理推广到$L[u]$可能只满足非严格不等式的情形．

定理 5. 设 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在区域D中满足微分不等式

$$L[u]\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\geqslant 0,$$

其中 L 是一致椭圆型的。假设系数 a_{ij} 和 b_i 一致有界。如果 u 在 D 的一点达到最大值 M，则在 D 中 $u=M$。

证明. 假设在 D 中某点 P 上 $u=M$ 而在 D 的另一点 Q 上 $u<M$。我们将得出矛盾。在 D 中作从 Q 延伸到 P 的一条弧 γ（见图3）。用 R 表示 γ 上使 $u=M$ 的第一点，即在 γ 的 Q 到 R 的部分上 $u<M$ 而 $u(R)=M$。设 $d>0$ 是 γ 上任何点与 D 的边界上任何点间距离的最大下界。我们考虑 γ 的 QR 部分上的一点 P_1，它到点 R 的距离小于 $\frac{1}{2}d$，作以 P_1 为中心的使 $u<M$ 的最大的球。这

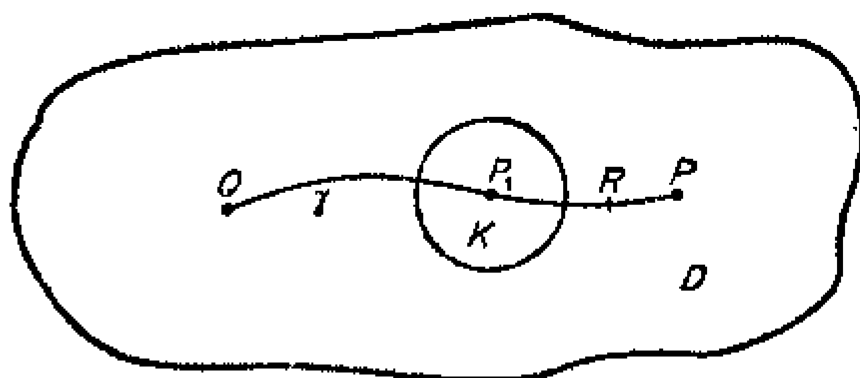


图 3

个球（称之为 K）的半径小于 $\frac{1}{2}d$，所以整个位于 D 中。设 S 是 K 的边界 ∂K 上使 $u=M$ 成立的一点。由连续性至少存在一个这样的点，也可能有许多这样的点。作一个球 K_1 与 ∂K 在点 S 相切，并且还整个地位于 K 中。（见图4.）用 ∂K_1 表示 K_1 的边界，我们看到在 K_1 中 $u<M$，并且在 ∂K_1 上除点 S 外 $u<M$。用 r_1 表示 K_1 的半径。

我们还要另外构造一个球。以 S 为中心，$r_2=\frac{1}{2}r_1$ 为半径作一个边界是 ∂K_2 的球 K_2（见图5）。我们用 C_2' 表示 ∂K_2 在 K_1 中和 ∂K_1 上的部分，即曲面 C_2' 包括它的边界，而此边界是 ∂K_2 和 ∂K_1 的交。∂K_2 在 ∂K_1 之外的部分称为 C_2''。

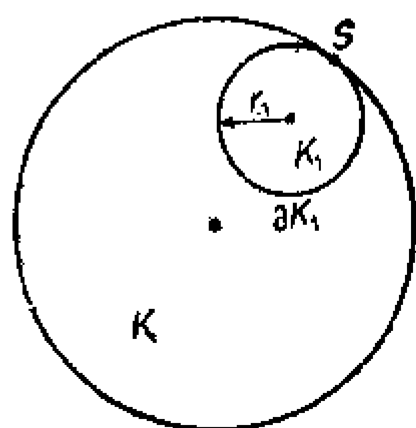


图 4

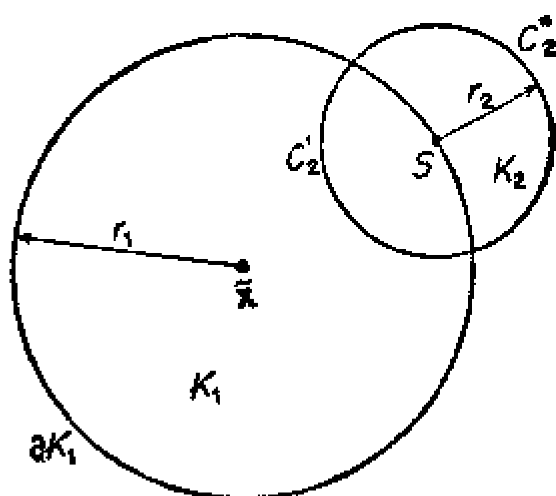


图 5

因为在闭集 C_2' 上 $u < M$，所以存在常数 $\zeta > 0$ 使得在 C_2' 上

$$u \leqslant M - \zeta.$$

由有界闭集上的连续函数必达到最大值这一事实可推出以上结论。另一方面，因为 $u \leqslant M$ 处处成立，我们知道在 C_2'' 上

$$u \leqslant M.$$

设 K_1 的中心用 $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n)$ 表示．定义辅助函数

$$z(\boldsymbol{x}) = e^{-\alpha \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{x}_i)^2} - e^{-\alpha r_1^2}, \tag{2}$$

其中 α 是待定正常数．于是显然有

$$\begin{aligned} &z > 0 \quad \text{在 } K_1 \text{ 中},\\ &z = 0 \quad \text{在 } \partial K_1 \text{ 上},\\ &z < 0 \quad \text{在 } K_1 \text{ 外}. \end{aligned}$$

我们算出

$$L[z]=e^{-\alpha\sum_{i=1}^{n}(x_i-\tilde{x}_i)^2}\left\{4\alpha^2\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x_i-\tilde{x}_i)(x_j-\tilde{x}_j)\right.$$

$$\left.-2\alpha\sum_{i=1}^{n}[a_{ii}+b_i(x_i-\tilde{x}_i)]\right\}.$$

由于算子 L 的一致椭圆性，我们有

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x_i-\tilde{x}_i)(x_j-\tilde{x}_j)\geqslant\mu_0\sum_{i=1}^{n}(x_i-\tilde{x}_i)^2.$$

因为在 K_2 中 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\tilde{x}_i)^2>\frac{1}{4}r_1^2$，对 K_2 中的 $\boldsymbol{x}$ 可得

$$L[z]\geqslant\alpha e^{-\alpha\sum_{i=1}^{n}(x_i-\tilde{x}_i)^2}\left\{\alpha\mu_0r_1^2-2\sum_{i=1}^{n}[a_{ii}+b_i(x_i-\tilde{x}_i)]\right\}.$$

选取 α 充分大，使上面花括号中的量为正，从而得到

$$L[z]>0\quad 在 K_2 中.$$

如同第一章中定理 1 的证明那样，我们作函数

$$w=u+\varepsilon z,$$

其中 ε 使得

$$0<\varepsilon<\frac{\zeta}{1-e^{-\alpha r_1^2}}.$$

函数 w 有以下性质:

(i) 在 C_2' 上 $w<M$. 为看出这一点，我们首先注意

$$0\leqslant z<1-e^{-\alpha r_1^2}.$$

所以 $\varepsilon z<\zeta$ 并且在 C_2' 上 $u\leqslant M-\zeta$. 把两个不等式相加就得到在 C_2' 上 $w<M$.

(ii) 在 C_2'' 上 $w<M$. 这是因为在 C_2'' 上 $z<0$ 以及 $u\leqslant M$ 处处成立.

(iii) 在 K_2 的中心 S 点 $w=M$. 因为由假设知在点 S，$u=M$，而由 z 的造法知在点 S，$z=0$，所以这是对的.

基于性质(i)，(ii)和(iii)，在球 K_2 内部某处 w 有最大值. 另一

方面，

$$L[w] = L[u] + \varepsilon L[z] > 0 \quad \text{在 } K_3 \text{ 中}.$$

所以，如果 L 是椭圆型的，w 的最大值就不能在 K_3 中出现．已经得出矛盾，定理证完．

附注. (i) 算子 L 的一致椭圆性和系数的有界性不是本质的．只要假设量

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\boldsymbol{x})}{\mu(\boldsymbol{x})} \quad \text{和} \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} |b_i(\boldsymbol{x})|}{\mu(\boldsymbol{x})}$$

在包含于 D 内的每个闭球上有界就足够了．

(ii) 区域 D 不必有界．

(iii) 把最大值原理用于 $-u$ 就可得到对满足 $L[u] \leqslant 0$ 的函数的最小值原理．所以，椭圆型方程 $L[u] = 0$ 的非常数解在 D 的内点上既不能达到最大值也不能达到最小值．

对形状为 $(L + h)$ 的算子，我们有和第一章第一节中一维情形相类似的一个结果．

定理 6. 设 u 满足微分不等式

$$(L + h)[u] \geqslant 0,$$

其中 $h \leqslant 0$，L 在 D 中是一致椭圆型的，并且 L 的系数和 h 有界．如果 u 在 D 的一个内点上达到非负最大值 M，则 $u \equiv M$．

完全遵照定理 5 证明的方法就可证明定理 6．完全一样地定义辅助函数 z 和正量 ε．和前面一样，注意若 $h \leqslant 0$，则满足不等式 $(L + h)[w] > 0$ 的函数 w 在区域中不能有非负最大值，由此可得出矛盾．

附注. (i)在较弱的假设下，即比值

$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\boldsymbol{x})/\mu(\boldsymbol{x})$, $\sum_{i=1}^{n} |b_i(\boldsymbol{x})|/\mu(\boldsymbol{x})$ 和 $-h(\boldsymbol{x})/\mu(\boldsymbol{x})$ 在 D 中的每

个闭球上都有界，这个证明仍然成立.

(ii) $h \leqslant 0$ 的限制是本质的，因为若 $h > 0$，则容易得到反例. 例如，函数 e^{-r^2} 在 $r = 0$ 处有最大值，而它是 n 维方程 $\Delta u + (2n - 4r^2)u = 0$ 的解.

设 u 在有光滑边界 ∂D 的区域 D 中满足 $L[u] \geqslant 0$. 我们知道如果 u 取到一个最大值，那么 u 必定在一个边界点上也取到它. 现在我们假设 u 在 $D \cup \partial D$ 上连续且有界，并假设在 ∂D 上存在一点 P，u 在该点取它的最大值. 如果 D 有界，这样一点 P 总是存在的. 首先，我们注意到在边界上点 P 处沿指向 D 外的任何方向，u 的方向导数不能为负. 若它为负，当我们在点 P 进入区域 D 时 u 将开始增大，因此最大值就不能在点 P 达到.

设 $\boldsymbol{n} = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 是 D 的边界上点 P 处的单位外法向量. 如果向量 $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$ 满足

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{n} > 0,$$

我们就说 $\boldsymbol{\nu}$ 在边界点 P 处指向 D 外. 我们把 u 在边界点 P 处沿方向 $\boldsymbol{\nu}$ 的**方向导数**定义为[1]

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \equiv \lim_{x \to P} [\boldsymbol{\nu} \cdot \operatorname{grad} u(\boldsymbol{x})] = \lim_{x \to P} \left(\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + \nu_n \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

（如果它存在的话）. 如果 $\boldsymbol{\nu}$ 指向 D 外，则称它为**外**方向导数. 于是，若 u 在点 P 有最大值，在点 P 就有 $\partial u / \partial \boldsymbol{\nu} \geqslant 0$.

现在来证明除非 u 是常数，严格的不等式 $\partial u / \partial \boldsymbol{\nu} > 0$ 在点 P 成立. 这个结果显然是第一章定理 2 的推广.

定理 7. 设 u 在区域 D 中满足不等式

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \geqslant 0,$$

L 在 D 中是一致椭圆型的. 假设在 D 中 $u \leqslant M$ 并且在边界点 P 上 $u = M$. 假设 P 位于 D 中球 K_1 的边界上. 如果 u 在 $D \cup P$ 中

---

1) 这里对通常定义稍加推广；在通常意义中要求 $\boldsymbol{\nu}$ 是单位向量.

连续，并且在点 P 外方向导数 $\partial u/\partial\nu$ 存在，那么在点 P

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}>0,$$

除非 $u\equiv M$.

证明. 象定理 5 的证明那样进行. 如果必要稍稍缩小 K_1, 于是我们可假设 ∂K_1 完全位于 $D\cup P$ 中. 作半径为 $\frac{1}{2}r_1$, 中心在 P 的球 K_2，其中 r_1 是 K_1 的半径. (见图 6.)按照(2)定义函数 z, 选 α 充分大使 $L[z]>0$ 在 K_2 中成立. 现在作出函数

$$w=u+\varepsilon z.$$

按照定理 5, 如果 $u\not\equiv M$，则除点 P 外 $u<M$ 在 K_1 中和在 K_1 的边界上成立. 我们记得在 K_1 的边界上 $z=0$. 选取 $\varepsilon>0$ 如此

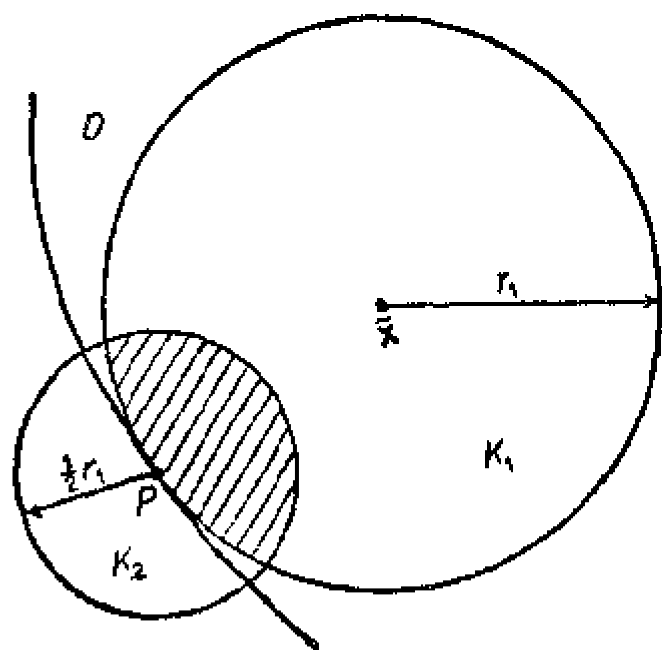


图 6

之小使得 $w\leqslant M$ 在位于 K_1 中的 K_2 的部分边界上成立.于是，在图 6 所示的阴影区域的整个边界上 $w\leqslant M$. 因为在这个区域中 $L[w]>0$，最大值在点 P 达到，且 $w(P)=M$. 所以，在点 P

$$\frac{\partial w}{\partial\nu}=\frac{\partial u}{\partial\nu}+\varepsilon\frac{\partial z}{\partial\nu}\geqslant 0.$$

现在要证明在点 P，$\partial z/\partial\nu<0$，所以 $\partial u/\partial\nu>0$ 在点 P 成立. 选

$\bar{x}$ 作为坐标系的原点，令 r 表示从 $\bar{x}$ 出发的 Euclid 距离，我们有

$$z = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha r_1^2},$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -2\alpha x_i e^{-\alpha r^2}$$

并且

$$\eta_i = \frac{x_i}{r}.$$

因此

$$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{\nu}} = -2\alpha r e^{-\alpha r^2} \sum_{i=1}^{n} \nu_i \eta_i < 0.$$

所以 $\partial u / \partial \nu > 0$，证明了定理的结论。

只要 $M \geqslant 0$，并且选 α 充分大使 $(L+h)[z] > 0$，则对 $h \leqslant 0$ 的算子 $L+h$ 定理 7 的证明同样行得通。

定理 8. 设 u 满足不等式

$$(L+h)[u] \geqslant 0,$$

其中 L 是定理 7 的算子，在 D 中 $h(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$. 假设在 D 中 $u \leqslant M$，在边界点 P 处 $u = M$，且 $M \geqslant 0$. 假若 P 位于 D 中一个球的边界上. 如果 u 在 $D \cup P$ 中连续，则 u 在点 P 的任何外方向导数是正的，除非在 D 中 $u \equiv M$.

附注. (i)两个重要的外方向导数是 $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{n}$ 时的法向导数以及 $\nu_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j$ 的余法向导数.

(ii) 如果把在 D 的内部 $u < M$ 这一假设加到定理 7 的假设条件中，则可在定理 5 之前证明定理 7. 于是定理 5 可作为定理 7 的推论得到. 为此，只需把带有附加假设的定理 7 用于图 4 中的球 K_1 以及它的使 $u = M$ 的边界点 S. 注意在一个内部最大值点处每个方向的导数必为零这一事实与定理 7 的结论矛盾. 这样一来 u 没有内部最大值，定理 5 得证.

(iii) u 的一个相对最大值在D的某子区域上是绝对最大值. 因此定理 5 表明：如果在D中 $L[u]\geqslant 0$ 并且 u 在内点 P 有一个相对最大值，则 u 在点 P 的某个邻域中是常数. 由定理 6，若有 $(L+h)[u]\geqslant 0$，又若 u 在点 P 有一非负相对最大值，则 u 是常数. 如果 u 的这个常数值是正的，则在点 P 的某个邻域中 $h=0$.

(iv) 在定理 7 和 8 的证明中，球 K_2 的半径可选得任意小. 因为在这样选半径之后向量 $\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}$ 几乎平行于点 P 的法向量，于是我们减弱假设条件：只要求比值 $a_{ij}/\sum a_{kl}\eta_k\eta_l$，$b_i/\sum a_{kl}\eta_k\eta_l$ 和 $h/\sum a_{kl}\eta_k\eta_l$ 在点 P 的 D 中的一个邻域中有界. 只要边界不是 L 的特征曲面[1]，如果算子 L 在边界上不是椭圆型的，这个结果仍然有效.

(v) 如果在点 P 导数 $\partial u/\partial \boldsymbol{\nu}$ 不存在，定理 7 的证明仍然表明[2]

$$\liminf_{\alpha\to 0^+}\frac{[u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{\nu})]}{\alpha}>0.$$

习 题

1. 假设 u 在有界区域 D 中满足 $L[u]\geqslant 0$，其中 L 由(1)给出，又假设 v 是 $L[v]=0$ 在 D 中的一个解. 如果在 ∂D 上 $u\leqslant v$，试证明在 D 上处处有 $u\leqslant v$. 证明当 D 无界时命题是错误的.

2. 当 $x^2+y^2<1$ 时函数 $u=[1-(x^2+y^2)]/[(1-x)^2+y^2]$ 是调和的并且是正的. 由于除(1,0)外当 $x^2+y^2=1$ 时 $u=0$，最大值原理是否成立? 试解释之.

3. 试证明在区域 D 中

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-u^2=0$$

的解不能在 D 中达到其最大值，除非 $u\equiv 0$.

4. 求 $D: x^2+y^2<1$ 的边界上每一点处算子

---

1) 不熟悉特征曲面概念的读者可跳过这句话. 在第四章中给出了关于特征曲面的一个简单讨论.

2) 关于 lim inf 的定义见第 110 页脚注.

$$L[u] \equiv (1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

的余法向导数.

第四节　边值问题的唯一性定理

我们从研究二阶偏微分方程最简单的边值问题之一开始. 在边界为 ∂D 的有界二维区域 D 上，我们提出如下的确定函数 $v(x,y)$ 的问题: v 在 D 中二次可微，在 $D \cup \partial D$ 上连续，满足方程

$$\Delta v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f(x,y) \quad 在 D 中 \tag{1}$$

和边界条件

$$v = g(s) \quad 在 \partial D 上. \tag{2}$$

方程(1)通常称为 Poisson 方程. 函数 f 在整个 D 上给定，而弧长 s 的函数 g 沿 ∂D 给定.

确定这样一个解 v 的问题通常称为 Dirichlet 问题. 也称之为第一边值问题.

我们不去研究足以保证 Dirichlet 问题解的存在性的关于 D 及关于 f 和 g 的条件. 但是，只用最大值原理，就能证明: 若第一边值问题的解存在，则它必是唯一的. 也就是说，我们可以证明第一边值问题至多能有一个解.

为建立这一结果，我们假设 v_1 和 v_2 是满足带有相同 f 和 g 的(1),(2)的两个函数. 定义

$$u = v_1 - v_2,$$

我们看到 u 满足

$$\Delta u = 0 \quad 在 D 中,$$
$$u = 0 \quad 在 \partial D 上,$$

按照最大值原理，在 D 的内部 u 不能有最大值. 可是，在有界闭集上，连续函数的最大值必能达到. 由于 u 在 $D \cup \partial D$ 上连续，又因由于在 ∂D 上 $u=0$，我们得出在 D 中 $u \leqslant 0$. 把同样推理应用于

$-u$,我们又得到在D中$u \geqslant 0$. 因此

$$u = v_1 - v_2 \equiv 0 \quad 在 D 中.$$

区域D有界这一假设是本质的. 否则, 下面的例子表明: 这个结果是不正确的. 设D是由

$$D = \begin{cases} -\infty < x < \infty, \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi \end{cases}$$

给出的无穷长带形(图 7). 函数

$$v = e^x \sin y$$

在D中满足 Laplace 方程,并且关系式

$$v(x, 0) = v(x, \pi) = 0$$

表明, v在D的边界上等于零. 虽然函数v满足最大值原理的条件,但v并不在边界上取最大值. 我们指出

$$v\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = e^x \to +\infty, \quad 当 \ x \to +\infty.$$

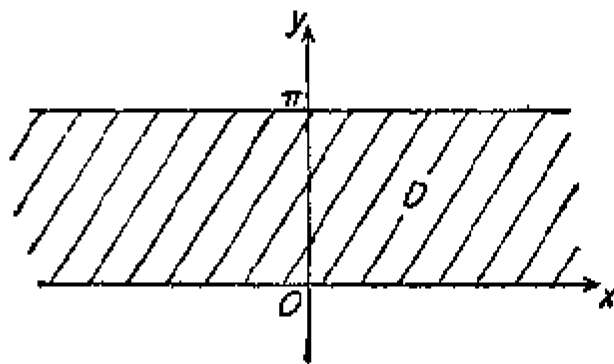


图 7

为了得到无界区域的唯一性定理, 必须规定关于v的性态的附加条件. 例如. 若规定了v在$x^2 + y^2 \to \infty$的极限,则当$x^2 + y^2 \to \infty$时$u = v_1 - v_2$的极限是零, 从而可推得唯一性结果. 我们将在第九节中证明,在无穷远处,更弱得多的条件可以保证唯一性.

任意个变量的 Laplace 方程的 Dirichlet 问题解的唯一性的证明,和上面在二维情形给出的完全一样.

对边界为 ∂D 的 n 维区域 D，我们考虑如下问题：确定函数 $v(\boldsymbol{x})=v(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使它在 D 中满足方程

$$(L+h)[v]\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}+h(\boldsymbol{x})v=f, \tag{3}$$

并且遵从边界条件

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}+\alpha(\boldsymbol{x})v=g_1\quad &\text{在 } \Gamma_1 \text{ 上},\\ v=g_2\quad &\text{在 } \Gamma_2 \text{ 上},\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中 $\partial/\partial\boldsymbol{\nu}$ 是 Γ_1 上每一点处给定的外方向导数。我们假设算子 L 在 D 中是椭圆型的，Γ_1 和 Γ_2 是不相交的集合，其并集构成 D 的边界 ∂D. 集合 Γ_1 和 Γ_2 可以由一些分开的片组成，而且不排除 Γ_1 或 Γ_2 是空集的可能性。

定理 9. 假设 v_1 和 v_2 在有界区域 D 中满足 (3) 和(4). 假设 Γ_1 的每一点都位于 D 中一个球的边界上. 若 L 是一致椭圆型的，$h(\boldsymbol{x})\leqslant 0$ 且有界，又 $\alpha(\boldsymbol{x})\geqslant 0$. 那么，除当 $h\equiv\alpha\equiv 0$，且 Γ_2 是空集时 v_1-v_2 必为常数外，$v_1\equiv v_2$.

证明. 定义 $u=v_1-v_2$，则 u 满足

$$(L+h)[u]=0\quad \text{在 } D \text{ 中}, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}+\alpha(\boldsymbol{x})u=0\quad &\text{在 } \Gamma_1 \text{ 上},\\ u=0\quad &\text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

如果 u 可取正值，它就应有正最大值. 根据定理 6，这个最大值必在 Γ_1 上的一点 P 达到. 如果 u 不是常数，由定理 8 知，在点 P 上，$\partial u/\partial\boldsymbol{\nu}>0$，这和(6)中第一个条件矛盾. 因此在 D 中或者 u 是常数，或者 $u\leqslant 0$. 对$(-u)$应用同样论证，我们看出 u 必是常数。

但是没有异于零的常数满足(5)和(6)，除非 $h\equiv\alpha\equiv 0$ 且 Γ_2 是空集，而在这种情形下，任何常数都满足(5)和(6)。

当 Γ_1 是空集时，定理 9 建立了 Dirichlet 问题的唯一性结果。

若 Γ_2 是空集，$\alpha=0$，而 $\partial/\partial\nu$ 是余法向导数，我们把问题(3)和(4)称为 Neumann 问题或第二边值问题. 定理 9 建立了它的解的唯一性(若 $h=0$，可差一个常数). 如果 α 不恒等于零，我们有第三边值问题. 如果 Γ_1 和 Γ_2 均非空集，我们就说这个问题带有混合边界条件.

与 Laplace 方程情形一样，当区域无界时，方程(3)的唯一性定理要求，当 $r=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$ 趋向无穷时对解的性态加上一个附加假设.

作为定理 5,7 和 9 的一个应用，我们考虑一个固体的稳定温度分布. 设 $T(x,y,z)$ 是均匀的各向同性介质在点 $P(x,y,z)$ 的温度，而该介质占据边界曲面为 ∂D 的有界区域 D. 假定边界曲面的一部分用 Γ_1 表示，它是绝热的，所以没有热流通过它. 在其余边界 Γ_2 上的温度分布是给定的. (Γ_1 和 Γ_2 每个都可以由若干片组成，见图 8.) 如果介质温度处于平衡状态(即温度不随时间变化)，则 T 满足方程

$$\Delta T=0 \quad \text{在 } D \text{ 中}$$

以及边界条件

$$\frac{\partial T}{\partial n}=0 \quad \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上},$$

$$T \text{ 给定} \quad \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}$$

($\partial/\partial n$ 是外法向导数).

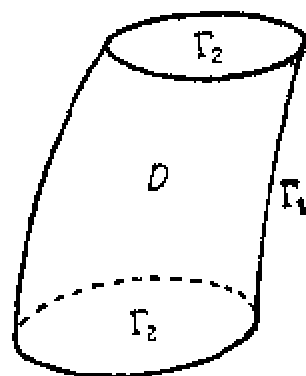


图 8

按照定理 5 和 7，在 D 中或在 Γ_1 上，都不能达到温度的最大值和最小值．因此，可以用最大值原理建立如下结果：**平衡温度永远在给定边界温度的最大值和最小值之间**．注意甚至仅仅在边界的一部分上给定温度，只要在边界其余部分没有热流通过，这个结果就仍然成立．因为进入物体的热流与 $\partial T/\partial \boldsymbol{n}$ 成正比，所以定理 7 断言：只有在边界上最热点供应热量，在最冷点取出热量，才能使不均匀的温度分布保持不变．

定理 9 保证了平衡温度分布的唯一性．

习　　题

1．设 D 是正方形 $|x|<1$，$|y|<1$．证明分量为(x,y)的向量 ν 在 ∂D 的每一点都指向 D 外．试验证任何常数满足

$$\Delta u=0 \quad 在 D 中,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=0 \quad 在 \partial D 上,$$

但是，如果 $\alpha\neq 0$，则非零常数不满足

$$\Delta u=0 \quad 在 D 中,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}+\alpha(\boldsymbol{x})u=0 \quad 在 \partial D 上.$$

2．证明问题

$$\Delta u=-1,当 |x|<1,|y|<1 时,$$

$$u=0 \quad 当 |x|=1 时,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad 当 |y|=1 时$$

至多有一个解．

3．证明：如果问题

$$\Delta u=0 \quad 当 |x|<1,\ |y|<1 时$$

$$u=0 \quad 当 |x|=1 时,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=1 \quad 当 |y|=1 时,$$

有解，则它至少有两个解．

第五节　广义最大值原理

定理 8 中的条件 $h(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$ 不能完全去掉．例如函数

$$u = \sin x \sin y$$

是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2u = 0$$

在正方形 $S: 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi$ 中的一个解，并且 u 在 ∂S 上满足边界条件

$$u = 0.$$

显然，u 在一个内点上达到其最大值．

和第一章中一样，用于证明 $h \leqslant 0$ 的最大值原理的方法，可以加以推广，建立广义最大值原理．于是，边值问题的唯一性定理是它的一个直接推论．

假设 $u(\boldsymbol{x})$ 在区域 D 中满足

$$(L + h)[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + h(\boldsymbol{x}) u \geqslant 0, \tag{1}$$

L 在 D 中是一致椭圆型的．我们不假设 h 非正．设 $w(\boldsymbol{x})$ 是给定在 $D \cup \partial D$ 上的一个正函数．定义

$$v(\boldsymbol{x}) = \frac{u(\boldsymbol{x})}{w(\boldsymbol{x})},$$

计算表明在 D 中

$$\frac{1}{w}(L + h)[u] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{2}{w} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} + b_i \right\} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{1}{w}(L + h)[w] v \geqslant 0.$$

于是，如果 w 在 D 中满足不等式

$$(L+h)[w]\leqslant 0,$$

我们就可以把定理 6 和定理 8 给出的最大值原理应用于函数 $v(\boldsymbol{x})$,从而得到下面的定理.

定理 10. 设 $u(\boldsymbol{x})$ 在区域 D 中满足微分不等式(1), L 在 D 中是一致椭圆型的. 如果存在函数 $w(\boldsymbol{x})$,使得

$$w(\boldsymbol{x})>0 \quad 在\ D\cup\partial D\ 上, \tag{2}$$

$$(L+h)[w]\leqslant 0 \quad 在\ D\ 中, \tag{3}$$

则 $u(\boldsymbol{x})/w(\boldsymbol{x})$ 不能在 D 中达到非负最大值, 除非它是常数. 如果 $u(\boldsymbol{x})/w(\boldsymbol{x})$ 在 ∂D 上点 P 达到它的非负最大值, 而 P 位于 D 中一个球的边界上,又若 u/w 不是常数,则在点 P

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\left(\frac{u}{w}\right)>0,$$

其中 $\partial/\partial\boldsymbol{\nu}$ 是任何外方向导数.

如果具有所述性质的函数 w 存在, 又若在 ∂D 上 $u=0$,则定理 10 蕴涵了第一边值问题解的唯一性. 我们在下面定理中叙述这个结论.

定理11. 如果存在 $D\cup\partial D$ 上的正函数 $w>0$, 使得 $(L+h)[w]\leqslant 0$ 在 D 中成立,又若 D 有界,则问题

$$(L+h)[u]=f(\boldsymbol{x}) \quad 在\ D\ 中,$$

$$u=g(\boldsymbol{x}) \quad 在\ \partial D\ 上$$

至多有一个解.

当然, 并非总能找到满足定理 10 和定理 11 所陈述的条件的函数. 从本节开始给出的例题,我们看到,函数 $u=c\sin x\sin y$,其中 c 是任何常数,是 $(\partial^2 u/\partial x^2)+(\partial^2 u/\partial y^2)+2u=0$ 在正方形 $0<x<\pi, 0<y<\pi$ 中的解,它在边界上满足条件 $u=0$. 因此解不唯一,所以对这个问题,函数 w 不可能存在.

只要区域 D 包含在一个以两个平行超平面为界的充分窄板形区域中, 我们可以给出一个确定具有性质(2)和(3)的函数 $w(\boldsymbol{x})$ 的特殊方法. 假定有界区域 D 包含在板形区域 $a<x_1<b$ 中,其中 x_1 是 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的第一个坐标; 令

$$w(x) = 1 - \beta e^{\alpha(x_1 - a)}, \tag{4}$$

选取数 α 和 β 时使(2)和(3)成立．我们算出

$(L + h)[w] = -\beta[\alpha^2 a_{11}(x) + \alpha b_1(x) + h(x)]e^{\alpha(x_1-a)} + h(x)$,

根据一致椭圆性假设，$a_{11}(x) \geqslant \mu_0$． 我们假设 $h(x)$ 有界而 $b_1(x)$ 有下界；即

$$-m \leqslant h(x) \leqslant M,$$

$$-m \leqslant b_1(x),$$

其中 m 和M 非负．选取 α 充分大，使

$$\alpha^2\mu_0 - (\alpha + 1)m > 0.$$

然后选取

$$\beta = \frac{M}{\alpha^2\mu_0 - (\alpha + 1)m}. \tag{5}$$

这时

$$(L + h)[w] \leqslant 0 \quad 在 D \cup \partial D 上.$$

但是，为保证在 $D \cup \partial D$ 上 $w > 0$，我们必须有

$$\beta e^{\alpha(b-a)} < 1,$$

即，必须满足不等式

$$M < [\alpha^2\mu_0 - (\alpha + 1)m]e^{-\alpha(b-a)}. \tag{6}$$

如果我们希望仍有增大 α 的余地，我们可选 α 使(6)的右端达到最大值[1]．注意当 $b - a$ 变小时右端变大．还有，当 $h(x)$ 的最大值 M 变小时，条件(6)的限制性也变小．只要 α 和 β 满足(5)和(6)，定理 10 的最大值原理对由(4)给出的 $w(x)$ 成立．所以，给定算子 $L + h$，总有一个数 $b - a$ 存在，使得若 $D \cup \partial D$ 位于一个厚度为 $b - a$ 的板中，则第一边值问题有唯一解．从另一个角度来看，条件(6)断言，对任何有界区域 $D \cup \partial D$，若 $h(x)$ 的正最大值M 充分小，则第一边值问题的解也是唯一的．

---

1) α 的最佳可能值给出不等式

$$M < (b-a)^{-2}[2\mu_0 + \{4\mu_0^2 + (m^2 + 4m\mu_0)(b-a)^2\}^{1/2}]$$
$$\cdot \exp\left[-\frac{1}{2\mu_0}(m(b-a) + 2\mu_0 + \{4\mu_0^2 + (m^2 + 4m\mu_0)(b-a)^2\}^{1/2})\right].$$

显然,板的厚度 $b-a$ 可在任何方向上,因为作坐标的旋转可使这个方向变成 x_1 方向.

其它边值问题解的唯一性也可以用广义最大值原理来证明. 设 u 是

$$(L+h)[u]\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}+h(\boldsymbol{x})u=0$$

在区域 D 中的解. 我们假设 u 满足边条件

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}+\alpha(\boldsymbol{x})u=0 \quad 在\ \Gamma_1\ 上,$$

$$u=0 \quad 在\ \Gamma_2\ 上,$$

这里边界 ∂D 由 Γ_1 和 Γ_2 两部分组成, $\partial u/\partial\boldsymbol{\nu}$ 是任何外方向导数. 我们仍假设 Γ_1 的每一点位于 D 中一球的边界上. 设 $w(\boldsymbol{x})$ 在 $D\cup\partial D$ 上为正,定义

$$v(\boldsymbol{x})=\frac{u(\boldsymbol{x})}{w(\boldsymbol{x})},$$

则 v 在 D 中满足

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2v}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}\left\{b_i+\frac{2}{w}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right\}\frac{\partial v}{\partial x_i}$$
$$+\frac{1}{w}(L+h)[w]v=0,$$

此外, v 满足边界条件

$$\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}+\frac{1}{w}\left\{\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}+\alpha(\boldsymbol{x})w\right\}v=0 \quad 在\ \Gamma_1\ 上,$$

$$v=0 \quad 在\ \Gamma_2\ 上.$$

由定理 9 可得, 如果在 D 中 $(L+h)[w]\leqslant 0$, 并且在 Γ_1 上 $(\partial w/\partial\boldsymbol{\nu})+\alpha(\boldsymbol{x})w\geqslant 0$,则在 D 中 $v\equiv 0$,除非: (i)$(L+h)[w]\equiv 0$;(ii)在 Γ_1 上 $(\partial w/\partial\boldsymbol{\nu})+\alpha(\boldsymbol{x})w\equiv 0$;(iii)$\Gamma_2$ 是空集,而这时 v 可以是任何常数.

以上论证建立了以下一般的唯一性定理.

定理 12. 假设 $D\cup\partial D$ 上存在正函数 $w(\boldsymbol{x})>0$,使得

$$(L+h)[w]\leqslant 0 \quad \text{在} D \text{中},$$

并且

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}+\alpha(\boldsymbol{x})w\geqslant 0 \quad \text{在} \Gamma_1 \text{上},$$

其中 ∂D 由 Γ_1 和 Γ_2 两部分组成。假设 Γ_1 的每一点位于 D 中一个球的边界上，而且 D 有界。则问题

$$(L+h)[u]=f(\boldsymbol{x}) \quad \text{在} D \text{中},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}+\alpha(\boldsymbol{x})u=g_1(\boldsymbol{x}) \quad \text{在} \Gamma_1 \text{上},$$

$$u=g_2(\boldsymbol{x}), \quad \text{在} \Gamma_2 \text{上}$$

至多有一个解 $u(\boldsymbol{x})$，除非 (i)$(L+h)[w]\equiv 0$; (ii) 在 Γ_1 上 $(\partial w/\partial \boldsymbol{\nu})+\alpha(\boldsymbol{x})w\equiv 0$; (iii)$\Gamma_2$ 是空集，这时在差 $\boldsymbol{w}$ 的常数倍范围内确定 u。

定理 12 可从以下事实得到：若 z_1 和 z_2 是两个解，则 $(z_1-z_2)/w$ 满足最大值原理。注意定理 12 包含定理 11 作为特殊情况（当 Γ_1 是空集）。

满足所需条件的 $w(\boldsymbol{x})$ 的存在性意味着不需要对 $h(\boldsymbol{x})$ 和 $\alpha(\boldsymbol{x})$ 作特别假定。

习　　题

1. 设 $(L+h)[u]\equiv(\partial^2 u/\partial x^2)+(\partial^2 u/\partial y^2)+2u$，又设 D 是正方形：$|x|<b$，$|y|<b$。如果 $w(x)=1-\beta e^{\alpha(x+b_1)}$，求 α，β，b 和 b_1 的值，使得若 $(L+h)[u]\geqslant 0$ 则 u/w 满足最大值原理。若 $w(x,y)=1-\beta e^{\alpha[(x+b_1)^2+(y+b_1)^2]}$，这些值又是多少?

2. 设 $(L+h)[u]\equiv(\partial^2 u/\partial x^2)+(\partial^2 u/\partial y^2)+yu$，又设 D_γ 是区域：$\{0<y<\gamma e^{-x^2}, -\infty<x<\infty\}$。求函数 w 及数 γ 使得若 $(L+h)[u]\geqslant 0$，则 u/w 在 D_γ 中满足最大值原理。

第六节　边值问题中的逼近

设 $u(\boldsymbol{x})$ 是

$$(L+h)[u]=f(\boldsymbol{x}) \quad 在D中 \tag{1}$$

的满足边界条件

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}+\alpha(\boldsymbol{x})u=g_1(\boldsymbol{x}) \quad 在\Gamma_1上,\\ u=g_2(\boldsymbol{x}) \quad 在\Gamma_2上\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

的解。

照例，假设 L 是一致椭圆型的，$\Gamma_1\cup\Gamma_2$ 组成边界 ∂D，$\partial u/\partial\boldsymbol{\nu}$ 是 Γ_1 的每一点上的外方向导数．此外，Γ_1 的每一点位于包含在 D 中的一个球的边界上，并且 D 有界．

最大值原理能用来得到(1)，(2)的解的界．我们所用的方法是第一章第五节中对常微分方程的解所用方法的自然推广．

我们假设 L，h 和 D 使如下的函数 $w(\boldsymbol{x})$ 存在，w 在 $D\cup\partial D$ 上为正并具有性质：

$$(L+h)[w]\leqslant 0 \quad 在D中,$$

$$\frac{\partial w}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\alpha(\boldsymbol{x})w\geqslant 0 \quad 在\Gamma_1上.$$

（若 $h(\boldsymbol{x})\leqslant 0$ 且 $\alpha(\boldsymbol{x})\geqslant 0$，则 $w(\boldsymbol{x})\equiv 1$ 具有所要的性质．）

现设能够求得满足不等式

$$(L+h)[z_1]\leqslant f(\boldsymbol{x}) \quad 在D中, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z_1}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\alpha(\boldsymbol{x})z_1\geqslant g_1(\boldsymbol{x}) \quad 在\Gamma_1上,\\ z_1\geqslant g_2(\boldsymbol{x}) \quad 在\Gamma_2上\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

的函数 $z_1(\boldsymbol{x})$．这样一来，函数

$$v=\frac{u-z_1}{w}$$

满足三个不等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{w}(L+h)[vw]&=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}\\ &+\sum_{i=1}^{n}\left\{b_i+\frac{2}{w}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right\}\frac{\partial v}{\partial x_i}\\ &+(L+h)[w]v\geqslant 0 \quad 在D中,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \frac{1}{w}\left\{\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \alpha w\right\} v \leqslant 0 \quad 在\ \Gamma_1\ 上,$$

$$v \leqslant 0 \quad 在\ \Gamma_2\ 上.$$

根据定理 6,若 v 不恒等于常数,它就只能在一个边界点上达到非负最大值. 根据定理 8,在 Γ_1 上 v 不能有非负最大值,除非它是常数. 如果 Γ_2 是空集,在 Γ_1 上 $(\partial w/\partial \boldsymbol{\nu}) + \alpha w \equiv 0$, 又若在 D 中 $(L + h)[w] \equiv 0$, 则 $v \equiv$ 常数 满足所有要求的条件. 而在所有其它的情形,我们得到 $v \leqslant 0$,所以

$$u(\boldsymbol{x}) \leqslant z_1(\boldsymbol{x}) \quad 在 D 中.$$

换言之,满足(3)和(4)的函数 $z_1(\boldsymbol{x})$ 提供了 u 的一个上界.

为了得到下界,我们假设能够求得满足不等式

$$(L + h)[z_2] \geqslant f(\boldsymbol{x}) \quad 在 D 中, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z_2}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \alpha(\boldsymbol{x}) z_2 \leqslant g_1(\boldsymbol{x}) \quad 在\ \Gamma_1\ 上, \\ z_2 \leqslant g_2(\boldsymbol{x}) \quad 在\ \Gamma_2\ 上 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

的函数 $z_2(\boldsymbol{x})$. 定义 $v = (z_2 - u)/w$ 并且用对 z_1 作过的同样的推理就可得到

$$z_2(\boldsymbol{x}) \leqslant u(\boldsymbol{x}) \quad 在 D 中.$$

定理 13. 假设存在 $D \cup \partial D$ 上的正函数 $w > 0$ 使得

$$(L + h)[w] \leqslant 0 \quad 在 D 中,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \alpha(\boldsymbol{x}) w \geqslant 0 \quad 在\ \Gamma_1\ 上,$$

其中 L 是一致椭圆型的,而 $\partial u/\partial \boldsymbol{\nu}$ 是一个外方向导数. 我们假设以下三个条件不同时成立. (i)在 Γ_1 上 $(\partial w/\partial \boldsymbol{\nu}) + \alpha(\boldsymbol{x}) w \equiv 0$, (ii)在 D 中 $(L + h)[w] \equiv 0$ 以及 (iii)Γ_2 是空集. 如果 $z_1(\boldsymbol{x})$ 和 $z_2(\boldsymbol{x})$ 分别满足(3),(4)和(5),(6), 则问题(1),(2)的解 u 在 D 中满足不等式

$$z_2(\boldsymbol{x}) \leqslant u(\boldsymbol{x}) \leqslant z(\boldsymbol{x}).$$

附注. 定理 12 是定理 13 的一个直接推论. 如果 $\bar{u}$ 和 u 都是

(1), (2)的解，我们可令 $z_1 = z_2 = \bar{u}$ 并应用定理 13 得出 $\bar{u} \leqslant u \leqslant \bar{u}$，所以 $u \equiv \bar{u}$。

现在我们来说明在一个特殊情形中可以怎样用定理 13 得出数值界.

例. 在正方形 $S:\{0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ 中求方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

满足边界条件(图 9)

$$u = 1 \quad \text{在线段 } l_1: 0 < x < 1, y = 0 \text{ 上,}$$

$$u = 1 \quad \text{在线段 } l_2: 0 < y < 1, x = 0 \text{ 上,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u = 0 \quad \text{在线段 } l_3: 0 < y < 1, x = 1 \text{ 上,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{在线段 } l_4: 0 < x < 1, y = 1 \text{ 上}$$

的解的界。

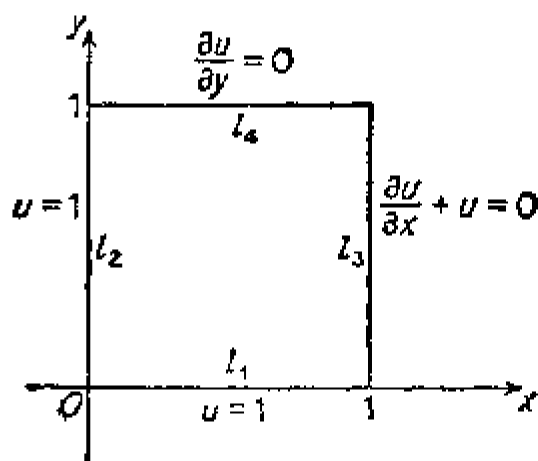


图 9

容易验证 $z_1 = 1$ 满足条件(3), (4)而 $z_2 = e^{-x}$ 满足条件(5), (6). 此外，函数 $w \equiv 1$ 满足定理 13 的条件. 所以

$$e^{-x} \leqslant u(x, y) \leqslant 1 \quad \text{在 } S \text{ 中.}$$

和一维情况一样，我们能够从定理 13 中消去无关的函数 w。

如果我们有一个满足(3)，(4)的函数 z_1 和一个满足(5)，(6)的函数 z_2 使得由(3)，(4)，(5)和(6)给出的不等式不全是恒等式，又若 $z_1 \geqslant z_2$，则我们可以构造一个函数 w 使定理 13 成立。

如果 $z_1 > z_2$，我们可以取 $w = z_1 - z_2$。如果 $q \equiv z_1 - z_2 \geqslant 0$，则在内点或在 Γ_1 上 q 不能为零。如果在 Γ_2 的一部分上 $q = 0$，我们可选 $w = q + \varepsilon r$，

其中 r 是问题

$$(L + h)[r] = 0 \quad 在 D 中,$$

$$\frac{\partial r}{\partial \nu} + \alpha r = 0 \quad 在 \Gamma_1 上,$$

$$r = 1 \quad 在 \Gamma_2 上$$

的解，而 ε 选得充分小使 $w > 0$ 在 $D \cup \partial D$ 上成立。如果假设问题(1)，(2)对任意的连续边值 $g_2(\boldsymbol{x})$ 可解，那么就有了函数 r 的存在性。

定理 14. 设 z_1 和 z_2 分别满足条件(3)，(4)和(5)，(6)，且在所有条件中恒等关系不同时成立。如果问题(1)，(2)对任意连续边值 $g_2(\boldsymbol{x})$ 有解，又若 u 是特定问题(1)，(2)的解，那么，当且仅当 $z_1 \geqslant z_2$ 时，估计式

$$z_2 \leqslant u \leqslant z_1$$

成立。

现设存在满足以下不等式的正函数 w：

$$\left.\begin{aligned} (L + h)[w] \leqslant -1 \quad & 在 D 中, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} + \alpha(\boldsymbol{x}) w \geqslant 1 \quad & 在 \Gamma_1 上, \\ w \geqslant 1 \quad & 在 \Gamma_2 上, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

这比定理 13 要求的条件稍强。如果 u 是问题(1)，(2)的解，又若我们定义

$$A = \max\{\sup_D |f(\boldsymbol{x})|, \sup_{\Gamma_1} |g_1(\boldsymbol{x})|, \sup_{\Gamma_2} |g_2(\boldsymbol{x})|\},$$

则定理 13 表明

$$|u(\boldsymbol{x})| \leqslant A w(\boldsymbol{x}).$$

如果 $\bar{u}$ 是问题

$$(L+h)[\bar{u}]=\bar{f}(\boldsymbol{x}) \quad 在 D 中,$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \boldsymbol{\nu}}+\alpha(\boldsymbol{x})\bar{u}=\bar{g}_1(\boldsymbol{x}) \quad 在 \Gamma_1 上,$$

$$\bar{u}=\bar{g}_2(\boldsymbol{x}) \quad 在 \Gamma_2 上$$

的解,以上论证表明

$$|\bar{u}(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x})| \leqslant w(\boldsymbol{x})\max\{\sup_D|\bar{f}-f|, \sup_{\Gamma_1}|\bar{g}_1-g_1|, \sup_{\Gamma_2}|\bar{g}_2-g_2|\} \tag{8}$$

在 D 上处处成立。特别是,如果 $\bar{f}-f$,$\bar{g}_1-g_1$,以及 $\bar{g}_2-g_2$ 一致地小,则 $\bar{u}-u$ 也一致地小。换句话说,问题(1),(2)的解连续依赖于数据。

如果定理 13 成立,又若对任意的连续数据问题(1),(2)可解,则问题

$$(L+h)[w]=-1 \quad 在 D 中,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}+\alpha(\boldsymbol{x})w=1 \quad 在 \Gamma_1 上,$$

$$w=1 \quad 在 \Gamma_2 上$$

的解满足不等式(7)。这样一来我们看到:只要问题(1),(2)对任意连续数据可解并且定理 13 成立,则(1),(2)的解连续依赖于数据。

为了利用不等式(8)来估计用 $\bar{u}$ 逼近 u 而造成的误差,当然,必须求得一个满足不等式(7)的显式函数 w。

习 题

1. 设 D 是正方形 $|x|<1$,$|y|<1$,又设 u 是问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad 在 D 中,$$

$$u=|x| \quad 当 |y|=1 时,$$

$$u=|y| \quad 当 |x|=1 时$$

的解。选取一个 x,y 的二阶调和多项式,在 ∂D 上它的边值逼近 u,并由此得

到 $u(0,0)$ 的界.

2.设 D 是单位圆域：$x^2+y^2<1$，又设 u 是问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \text{在}D\text{中}$$

$$u=1 \quad \text{当 } r=1, \quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2} \text{ (极坐标)时,}$$

$$u=2-\frac{2}{\pi}\theta \quad \text{当 } r=1, \quad \frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi \text{ 时,}$$

$$u=0 \quad \text{当 } r=1, \quad \pi\leqslant\theta\leqslant\frac{3}{2}\pi \text{ 时,}$$

$$u=\frac{2}{\pi}\theta-3 \quad \text{当 } r=1 \text{ 时}, \frac{3}{2}\pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

设 v 是调和函数 $\sum_{k=0}^{2} r^k(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)$. 试选取量 $a_k, b_k, k=0,1,2$ 使它逼近 u 的边值，并由此得到 u 在点 $x=\frac{1}{2}, y=0$ 的界. 基于这个结果，关于 u 在点 $x=0, y=\frac{1}{2}$ 的界可得什么结论?

第七节 Green 恒等式与 Green 函数

设 D 是三维空间中边界 ∂D 分片光滑[1]的区域. 假设 $\boldsymbol{w}$ 是定义在包含 $D\cup\partial D$ 的一个开集中的光滑向量场，$\boldsymbol{n}$ 是边界曲面 ∂D 的单位外法向向量. **散度定理**可表为

$$\int_D \operatorname{div}\boldsymbol{w}\,dV=\int_{\partial D}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\,dS, \tag{1}$$

其中 dV 是 D 中的体积元而 dS 是 ∂D 上的面积元. 设 u 和 v 是定义在 $D\cup\partial D$ 上的数量函数，充分光滑使得对它们的微分和积分运算总是有效的. 我们选取 $\boldsymbol{w}=v\operatorname{grad}u$. 于是公式(1)变成

1) 如果边界曲面 ∂D 由有限多个曲面块组成，而在每一曲面块上，用以表示它的坐标之一能用另外两个坐标的连续可微函数表出，则我们说它是**分片光滑的**. 这样的曲面可有有限条棱和尖点，它们把光滑的曲面块连接起来.

$$\int_D [v\operatorname{div}\ \operatorname{grad}u + \operatorname{grad}v\cdot\operatorname{grad}u]dV = \int_{\partial D} v\operatorname{grad}u\cdot\boldsymbol{n}dS. \qquad (2)$$

利用恒等式

$$\Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u$$

以及记号 $\partial u/\partial \boldsymbol{n} = \operatorname{grad}u\cdot\boldsymbol{n}$,可把(2)写成形式

$$\int_D v\Delta u dV + \int_D \operatorname{grad}v\cdot\operatorname{grad}u dV = \int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}dS. \qquad (3)$$

等式(3)通称为 Green 第一恒等式. 在(3)中交换 u 和 v, 我们得到

$$\int_D u\Delta v dV + \int_D \operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v dV = \int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}dS.$$

从(3)减去这个等式,我们就得到 Green 第二恒等式

$$\int_D (v\Delta u - u\Delta v)dV = \int_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)dS. \qquad (4)$$

借助两个 Green 恒等式,可立即导出几个有趣的事实.

定理 15. 如果 u 在有界区域 D 中调和并在闭包 $D\cup\partial D$ 上连续可微,则

$$\int_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}dS = 0, \qquad (5)$$

其中 $\partial/\partial \boldsymbol{n}$ 是关于 ∂D 的法向导数.

证明. 在(3)中令 $v = 1$, 我们看到 $\operatorname{grad}v = 0$, 因此直接得出(5).

如果 u 是调和函数, 则 Green 第一恒等式给出了类似于在第四节中所得的唯一性定理. 例如,如果我们令 $v = u$, 则(3)变成(其中 u 是调和的)

$$\int_D |\operatorname{grad}u|^2 dV = \int_{\partial D} u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}dS.$$

此外,若 u 在 ∂D 上等于零,则右端是零. 因为 $|\operatorname{grad}u|^2$ 总是非负的, 它就必须在整个 D 上为零. 因此在 D 中 $u = 0$. 同样的推理表明,若在 ∂D 上 $\partial u/\partial \boldsymbol{n} = 0$,则 u 必在整个 D 上等于常数. 利用

最大值原理已经得到了这样的结果．虽然 Green 恒等式简捷地给出了唯一性定理，但是用最大值原理得到的类似结果所需要的加在函数和区域上的限制性假设较少．

借助于 Green 第二恒等式(4)，现将得到定义在三维 Euclid 空间的区域D中的二次连续可微函数的重要表示公式．考虑两点$P(x,y,z)$，$Q(\xi,\eta,\zeta)$，并用r_{PQ}表示P，Q间的 Euclid 距离；即

$$r_{PQ}^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2.$$

简单的计算表明

$$\Delta\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)=0\quad \text{当 } P\neq Q \text{ 时}.$$

在计算r_{PQ}^{-1}的Δ时，我们假设Q固定而微分是对x，y和z求的．

设Q是有界区域D中一个固定点，又设$\phi(x,y,z)$在D处处调和．定义函数

$$W(x,y,z)=\frac{1}{4\pi r_{PQ}}+\phi(x,y,z),$$

在D中除$P=Q$外是调和的．我们想把 Green 第二恒等式用到函数W上去．因为W在点Q有奇性，我们构造区域$D-D_\rho$来排除点Q，其中D_ρ是中心在Q半径为ρ的球．(见图 10)在区域$D-D_\rho$上应用(4)，其中$v=W$而u是给定的二次连续可微函数，我们发现

$$\int_{D-D_\rho}W\Delta u dV=\int_{\partial(D-D_\rho)}\left(W\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial W}{\partial n}\right)dS.$$

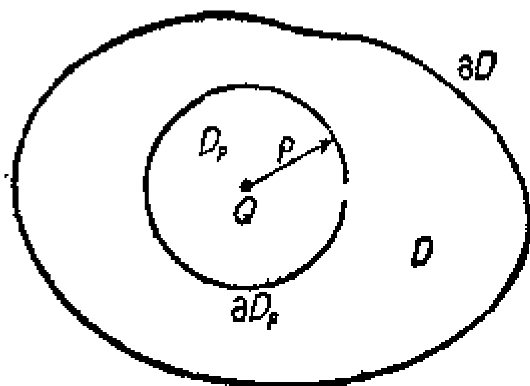


图 10

D_ρ 的边界是中心在 Q 半径为 ρ 的球面．所以在 D_ρ 上指向 $D-D_\rho$ 外的法向导数是内径向导数．我们得到

$$\int_{D-D_\rho} W\Delta u dV = \int_{\partial D}\left(W\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{n}}\right)dS - \int_{\partial D_\rho}\left(W\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial W}{\partial r}\right)dS. \tag{6}$$

我们首先考虑(6)中在 ∂D_ρ 上的积分．代入 W 的值并利用中心在点 Q 的球坐标，得出

$$\int_{\partial D_\rho}\left(W\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial W}{\partial r}\right)dS = \frac{1}{4\pi}\int_{r=\rho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right)r^2\sin\theta d\theta d\phi + \int_{\partial D_\rho}\left(\phi\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)dS. \tag{7}$$

把 Green 第二恒等式用于球 D_ρ，可把(7)中右端最后一个积分变形．因为 ϕ 调和，我们得到

$$\int_{\partial D_\rho}\left(\phi\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)dS = \int_{D_\rho}\phi\Delta u dV. \tag{8}$$

在上面所有的积分中，我们感兴趣的是当球 D_ρ 的半径 ρ 趋于 0 时它们的性态．因为在 D_ρ 中 ϕ 和 Δu 有界，从(8)可得

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\partial D_\rho}\left(\phi\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)dS = 0. \tag{9}$$

我们把(7)右端的第一个积分的两部分分开考虑．因为 $|\text{grad } u|$ 处处有界，例如说不超过 M，于是我们有

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int_{r=\rho} r\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta\, d\theta\, d\phi\right| \leqslant M\rho.$$

因此

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{4\pi}\int_{r=\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\cdot r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi = 0. \tag{10}$$

因为点 Q 是固定的，我们可以写出

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi}\int_{r=\rho} u(Q)\sin\theta\, d\theta\, d\phi,$$

又因 u 在 Q 连续，于是

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{4\pi}\int_{r=\rho}|u(P)-u(Q)|\sin\theta\,d\theta\,d\phi=0.$$

我们得到

$$u(Q)=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{4\pi}\int_{r=\rho}u(P)\sin\theta\,d\theta\,d\phi. \tag{11}$$

在(6)中令 ρ 趋于零，并利用(7)，(9)，(10)和(11)，我们就得到名为 Green 第三恒等式的表示公式：

$$u(Q)=\int_{\partial D}\left(W\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{n}}\right)dS-\int_D W\Delta u\,dV. \tag{12}$$

我们注意这个公式具有某种任意性，因为其中的调和函数 ϕ 仍由我们支配。通常 Green 第三恒等式是对 $\phi=0$ 来叙述的，这时 $W=1/4\pi r_{PQ}$。

表示公式(12)可用于求解 Laplace 算子的第一边值问题。设 u 是

$$\Delta u=f(x,y,z)\quad 在\ D\ 中 \tag{13}$$

的满足边界条件

$$u=g(x,y,z)\quad 在\ \partial D\ 上 \tag{14}$$

的解。于是公式(12)变成

$$u(\xi,\eta,\zeta)=\int_{\partial D}\left(W\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-g\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{n}}\right)dS-\int_D Wf\,dV. \tag{15}$$

除包含 $\partial u/\partial \boldsymbol{n}$ 的一项外，(15)的右端是已知的。为了消去这一项，我们利用 W 表达式中由我们支配的调和函数 ϕ。选取 ϕ 使 W 在 ∂D 上等于零；即我们解出问题

$$\left.\begin{aligned}\Delta\phi&=0\quad 在\ D\ 中,\\ \phi&=-\frac{1}{4\pi r_{PQ}}\quad 在\ \partial D\ 上.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

对这样选得的 ϕ（我们注意 ϕ 依赖于作为参数的 Q），我们得到下面的定义。

定义. 设 D 是有界区域而 Q 是 D 的一个固定点。具有以下性

质的函数 $(1/4\pi r_{PQ})+\phi(P)$ 称为D关于 Laplace 方程的 Green 函数：(i)ϕ在整个D上调和，(ii)$(1/4\pi r_{PQ})+\phi$ 在 ∂D 上等于零。

我们用 $G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)$ 或 $G(P;Q)$ 来表示 Green 函数；在(15)中当用 Green 函数作W时，我们求得

$$u(\xi,\eta,\zeta)=-\int_{\partial D} g\frac{\partial G}{\partial n_P}dS_P-\int_D GfdV_P.$$

上面公式中的下标表示关于坐标为(x,y,z)的点P进行微分和积分.

自然要问是否对所有的区域 Green 函数都存在，并且如果存在的话，是否能够显式地求出它来. Green 函数的存在性等价于问题(16)的可解性. 虽然能够证明对广泛的一类区域 Green 函数确实存在，但是只对几种特殊的区域知道它的显式公式. Green 函数的最大好处是由于它给出了第一边值问题解的性质的信息.

从 Green 函数的定义知道

$$G(P;Q)\to+\infty \quad 当P\to Q时.$$

所以，如果D_ρ是中心为Q的充分小的球，包含D_ρ的区域D的 Green 函数在∂D_ρ上将是正的. 由于G在$D-D_\rho$中调和，在D_ρ上为正，又在∂D上等于零，从最大值原理可得在整个$D-D_\rho$上G为正. 因此，在D中除G无定义的点Q外$G>0$. G的最小值是零，并在∂D的每一点达到. 由定理 7 知，在位于D中某个球的边界上每一边界点P处G的外法向导数为负. 这样一来，作为最大值原理的直接推论，我们得到：对于任何使 Green 函数有定义的有界区域，

$$G>0 \quad 在D中,$$

$$\frac{\partial G}{\partial n}<0 \quad 在\partial D上$$

成立.

现在我们考虑更一般的边值问题

$$\Delta u=f(x,y,z) \quad 在D中, \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n}+\alpha(x,y,z)u=g_1(x,y,z) \quad & \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}, \\ u=g_2(x,y,z) \quad & \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

其中 $\alpha \geqslant 0$ 且 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial D$.

和边值问题(13), (14)的情况一样，我们能够定义边值问题(17),(18)的 Green 函数[1]. 通过求解一个对于 ϕ 的形状为(17), (18)的边值问题即可。确定 $\phi(x,y,z)$ 使得

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{在 } D \text{ 中},$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}+\alpha\phi=-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)+\alpha\frac{1}{r_{PQ}}\right] \quad \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上},$$

$$\phi=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right) \quad \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}.$$

如果我们能求得满足上述条件的函数 ϕ,则我们定义

$$G(P;Q)=\frac{1}{4\pi r_{PQ}}+\phi$$

作为问题(17),(18)的 Green 函数. 在 Green 第三恒等式 (12) 中取这个 Green 函数作为 W,我们就得到(17),(18)解的公式:

$$u(\xi,\eta,\zeta)=-\int_D G(P;Q)f(P)dV_P+\int_{\Gamma_1} G(P;Q)g_1(P)dS_P$$
$$-\int_{\Gamma_2} g_2(P)\frac{\partial G}{\partial n_P}dS_P. \tag{19}$$

这里再用最大值原理可以证明问题(17),(18)的 Green 函数满足

$$\left.\begin{aligned} G>0 \quad & \text{在 } D\cup\Gamma_1 \text{ 中}, \\ \frac{\partial G}{\partial n}<0 \quad & \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

---

1) Green 函数不仅依赖于区域 D 和微分算子,而且还依赖于所加的边界条件. 至此我们只考虑了条件: ∂D 上 $G=0$, 这对应于第一边值问题. 但是每种类型的边界条件导出一个 Green 函数. 对某些特殊类型的边界条件，所对应的函数常常与 Neumann 和 Robin 的名字联在一起.

反之，Green 函数的上述性质允许我们从公式（19）得知（17），(18)的解 u 的一些性质。例如，如果在 D 中 $f \leq 0$，在 Γ_1 上 $g_1 \geq 0$，在 Γ_2 上 $g_2 \geq 0$，则(19)和(20)表明在 D 中 $u \geq 0$。而且，如果 f, g_1 和 g_2 不全恒等于零，则在 D 中 $u > 0$。

前面关于调和函数的结果能够推广到任意个自变量的一般二阶椭圆型方程的解上去。我们考虑如下的问题：求函数 u 在有界区域 D 中满足

$$(L+h)[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + h(\boldsymbol{x}) u = f(\boldsymbol{x}) \tag{21}$$

并满足边界条件

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \alpha(\boldsymbol{x}) u = g_1(\boldsymbol{x}) \quad & 在 \Gamma_1 上, \\ u = g_2(\boldsymbol{x}) \quad & 在 \Gamma_2 上. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

我们假设 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial D$，并且 Γ_1 的每一点都在 D 中一个球的边界上。导数 $\partial/\partial \boldsymbol{\nu}$ 是余法向导数，其定义为

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \eta_j \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

如果，特别地，$L = \Delta$ 和 $h(\boldsymbol{x}) \equiv 0$，则本节的结果对 n 个自变量($n > 2$)的推广是直接的。因为这些结果的推导和 $n = 2$ 的情形是一样的，我们指出在任意维数时，不必作任何变形 Green 第一和第二恒等式仍然成立。为了得到 n 维（$n > 3$）的 Laplace 算子的 Green 函数，我们用函数（$1/\omega_n r_{PQ}^{n-2}$）来代替 $n = 3$ 时所用的($1/4\pi r_{PQ}$)，其中 ω_n 是 n 维单位球的表面积，而 r_{PQ} 是 n 维空间中从 P 到 Q 的距离。计算表明当 $P \neq Q$ 时$\Delta(1/r_{PQ}^{n-2}) = 0$，而推导 Green 第三恒等式的其余部分平行于 $n = 3$ 的情形。二维的情形需要专门考虑，要用函数（$1/2\pi$）$\log$（$1/r_{PQ}$）来代替($1/\omega_n r_{PQ}^{n-2}$)。

对于一般的算子 L，我们用下列性质来定义问题(21)，(22)的 Green 函数：

(i) $G(P;Q)r_{PQ}^{n-2}$ 是Q的有界函数，并且在P附近对Q有正下界。

(ii) 在D中当$Q\neq P$时 $(L_Q+h(Q))[G(P;Q)]=0$。记号L_Q的意思是把算子作用于 $G(P;Q)$ 中Q的坐标 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 而保持 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 固定。

(iii) 对 Γ_1 上的每点 Q 和 D 中每个固定的 P，$\partial G/\partial\boldsymbol{\nu}_Q+\alpha(Q)G(P;Q)=0$。微商是对$\boldsymbol{\xi}$求的。

(iv) 对 Γ_2 上的Q和D中每点 P，$G(P;Q)=0$。

如果L的系数和D的边界充分光滑，又若问题(21)，(22)对任意的数据有唯一解，则可以证明对区域D中的算子L存在具有性质 (i)—(iv) 的 Green 函数。这时可以推出 Green 恒等式，并且(21)，(22)的解 $u(\boldsymbol{\xi})$ 由下式给出：

$$u(Q)=-\int_D G(P;Q)f(P)dV_P+\int_{\Gamma_1}G(P;Q)g_1(P)dS_P-\int_{\Gamma_2}g_2(P)\frac{\partial G}{\partial\boldsymbol{\nu}_P}dS_P. \tag{23}$$

由于 Green 函数的条件(i)，我们知道G在以点P为中心ρ为半径的一个充分小的球D_ρ上是正的。于是对$D-D_\rho$中的Q我们有 $(L+h)[G]=0$，在Γ_1上 $(\partial G/\partial\boldsymbol{\nu})+\alpha G=0$，并且在$\Gamma_2\cup\partial D_\rho$上$G\geqslant 0$。现设存在一个满足定理 13 假设的在$D\cup\partial D$上定义的函数$w>0$。那么我们可以在$D-D_\rho$中把最大值原理应用于$G/w$而得出结论在$D-D_\rho$中$G>0$。令$\rho\to 0$，就得到在$D$中$G>0$。而且，我们发现对于$\Gamma_2$上的$P$，$G=0$，因此在$\Gamma_2$上$\partial G/\partial\boldsymbol{\nu}_P\leqslant 0$。反之，如果 Green 函数具有这些性质，那么从解的公式(23)看出问题

$$(L+h)[w]=-1 \quad 在D中,$$

$$\frac{\partial w}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\alpha w=1 \quad 在\Gamma_1上,$$

$$w=1 \quad 在\Gamma_2上$$

有一个满足定理 13 假设的解。从而我们已经证明了下面的定理。

定理 16. 当且仅当问题(21),(22)的 Green 函数在D中为正时,把定理 13 用于它的解 u 而得的上,下界估计式成立。

习　　题

1. 验证

$$G(x,y;\xi,\eta)\equiv\frac{1}{4\pi}\log\frac{(x^2+y^2)(\xi^2+\eta^2)-2(x\xi+y\eta)+1}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

是问题

$$\Delta u=f \quad 在\ D:\ x^2+y^2<1\ 中,$$
$$u=g \quad 当\ x^2+y^2=1\ 时$$

的 Green 函数。

2. 验证第 1 题中的 Green 函数在 ∂D 的每一点处的外法向导数为负。

3. 验证

$$G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4\pi}\{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{-1/2}$$
$$-[(x^2+y^2+z^2)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)-2(x\xi+y\eta+z\zeta)+1]^{-1/2}\}$$

是问题

$$\Delta u=f \quad 在\ D:x^2+y^2+z^2<1 中,$$
$$u=g \quad 在\ \partial D\ 上$$

的 Green 函数。

4. 验证第 3 题中的 Green 函数在 ∂D 的每一点处的外法向导数为负。

第八节　特　征　值

我们考虑在区域D中确定方程

$$(L+h+\lambda k)[u]\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}$$
$$+[h(\boldsymbol{x})+\lambda k(\boldsymbol{x})]u=0 \qquad (1)$$

的服从边界条件

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}+\alpha(\boldsymbol{x})u=0 \quad 在\ \Gamma_1\ 上,\\ u=0 \quad 在\ \Gamma_2\ 上\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

的解的问题．假设 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial D$，$k(\boldsymbol{x}) \geqslant \eta > 0$ 在 $D \cup \partial D$ 上成立，$\partial/\partial \boldsymbol{\nu}$ 是一个指向D外的方向导数，而λ是一个常数．照例，我们假设Γ_1的每一点都位于D中一个球的边界上． 因为 $u \equiv 0$ 总是(1)，(2)的一个解，所以我们把注意力限于不恒等于零的解．这种解称为非平凡解．

定义． 如果对于某数 λ，存在(1)，(2)的非平凡解 $u(\boldsymbol{x})$，则把 λ 的这个值称为特征值；把对应的解 u 称为特征函数．

可能发生如下情形：(1)，(2)的解存在，而对应的特征值是复数．因为 L 的系数是实的，所以很显然对应于复特征值的特征函数是 $\boldsymbol{x}$ 的复值函数．

现在证明怎样用最大值原理得出(1)，(2)的任何特征值的实部的下界．利用下面的记号：$\mathrm{Re}\mu$ 和 $\mathrm{Im}\mu$ 分别表示复数 μ 的实部和虚部；$\bar{\mu} = \mathrm{Re}\mu - i\mathrm{Im}\mu$ 是 μ 的复共轭；$|\mu|^2 = \mu\bar{\mu}$.

假设我们能够找到一个满足以下条件的实值函数 $w(\boldsymbol{x})$：

$$(L + h + \beta k)[w] \leqslant 0 \quad 在 D 中， \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} & w(\boldsymbol{x}) > 0 \quad 在 D \cup \partial D 上， \\ & \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \alpha(\boldsymbol{x}) w \geqslant 0 \quad 在 \Gamma_1 上， \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中 β 是一个实常数．我们可以证明：如果 λ 是(1)，(2)的特征值，则

$$\mathrm{Re}\lambda \geqslant \beta, \tag{5}$$

即 β 是(1)，(2)所有特征值的实部的下界．

为证明(5)，设 $u(\boldsymbol{x})$ 是(1)，(2)的对应于 λ 的一个特征函数，定义

$$v(\boldsymbol{x}) = \frac{u(\boldsymbol{x})}{w(\boldsymbol{x})} ,$$

其中 w 满足条件(3)，(4)．因为 u 满足(1)，我们有

$$\frac{1}{w}(L + h + \lambda k)[vw] = \left(L + \frac{2}{w}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}\right) [v]$$

$$+\frac{(L+h+\lambda k)[w]}{w}v=0.$$

我们记

$$L_1=L+\frac{2}{w}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j},$$

所以 v 满足方程

$$L_1[v]+\frac{(L+h+\lambda k)[w]}{w}v=0. \tag{6}$$

在(6)中取复共轭,求得 $\bar{v}$ 满足方程

$$L_1[\bar{v}]+\frac{(L+h+\bar{\lambda}k)[w]}{w}\bar{v}=0. \tag{7}$$

现在我们来计算量 $L_1(|v|^2)$:

$$L_1(v\bar{v})=\bar{v}L_1[v]+vL_1[\bar{v}]+2\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}.$$

因为 a_{ij} 是对称的,我们有

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left[\left(\operatorname{Re}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\left(\operatorname{Re}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)+\left(\operatorname{Im}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\left(\operatorname{Im}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)\right].$$

还有,因为 L 是椭圆型的,最后这个表达式总是非负的. 所以

$$L_1[|v|^2]\geqslant\bar{v}L_1[v]+vL_1[\bar{v}].$$

把(6),(7)代入这个表达式,我们就求得

$$L_1[|v|^2]\geqslant-\frac{(L+h+\lambda k)[w]}{w}|v|^2-\frac{(L+h+\bar{\lambda}k)[w]}{w}|v|^2$$

或

$$L_1[|v|^2]\geqslant-2\frac{(L+h+(\operatorname{Re}\lambda)k)[w]}{w}|v|^2.$$

如果 λ 使得 $\mathrm{Re}\lambda \leqslant \beta$ 成立，从(3)和(4)我们看到

$$L_1[|v|^2] \geqslant 0 \quad 在 D 中。$$

这样一来 $|v|^2$ 在 D 中满足最大值原理. 因为 $v = u/w$，从(2)知道

$$v = 0 \quad 在 \Gamma_2 上.$$

因此，如果 $|v|^2$ 不恒等于零，其最大值一定在 Γ_1 上达到. 然而，在 Γ_1 上我们有

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}(v\bar{v}) = v\frac{\partial \bar{v}}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \bar{v}\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = v\frac{[w(\partial \bar{u}/\partial \boldsymbol{\nu}) - \bar{u}(\partial w/\partial \boldsymbol{\nu})]}{w^2}$$

$$+ \bar{v}\frac{[w(\partial u/\partial \boldsymbol{\nu}) - u(\partial w/\partial \boldsymbol{\nu})]}{w^2}$$

$$= -2\alpha v\bar{v} - 2\frac{v\bar{v}}{w}\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}.$$

换句话说，$|v|^2$ 在 Γ_1 上满足边界条件

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}(|v|^2) + \frac{2|v^2|}{w}\left(\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \alpha w\right) = 0. \tag{8}$$

如果 w 在 Γ_1 上满足(4)，则(8)和第三节定理 7 给出的最大值原理表明 $|v|^2$ 在 Γ_1 上不能有正最大值. 因此，只要 $\mathrm{Re}\lambda < \beta$ 就有 $v \equiv 0$. 所以，这样的 λ 不能是(1)，(2)的特征值. 我们已经证明了 β 是任何特征值 λ 的实部的下界.

对于 D 中二次连续可微的正函数 w，满足(3)的 β 的最大值是

$$\beta = \inf_{x\in D} \frac{-(L+h)[w]}{k(\boldsymbol{x})w}. \tag{9}$$

于是我们已经建立了以下结果：

定理 17. 设 λ 是(1)，(2)的特征值. 设 $w(\boldsymbol{x})$ 在 $D\cup\partial D$ 上为正并在 Γ_1 上满足

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \alpha(\boldsymbol{x})w \geqslant 0,$$

则

$$\mathrm{Re}\lambda \geqslant \inf_{x\in D} \frac{-(L+h)[w]}{kw}. \tag{10}$$

附注. (i)如果我们把(1),(2)的所有特征值画在复平面 $z = x + iy$ 上，那么定理 17 表明所有的特征值都位于半平面 $x \geqslant \beta$ 中，其中 β 由(9)给出.

(ii) 对于我们考虑中的这类椭圆型算子，可以证明至少总有一个实特征值，它在如下意义上是最小的：即其它的特征值不会有更小的实部 (Protter 和 Weinberger [2]).

(iii) 已知所有的特征值都是实数时，形状为(10)的各种界曾经由 Barta [1], Duffin [1], Hersch [1,2] 以及 Hooker [1] 得到。Pucci [6] 曾给出了一般情形的一个有关的界.

例. 设 D 是半圆 $x^2+y^2<1, y>0$. 求问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0 \quad 在 D 中 \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \quad 在 \Gamma_1: -1 \leqslant x \leqslant 1, y = 0 上, \\ u &= 0 \quad 在 \Gamma_2: x^2+y^2 = 1, y > 0 上 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

的特征值的下界.

我们令

$$w(x,y) = 1 - \alpha(x^2+y^2) \quad 其中 \alpha < 1.$$

显然，w 在 D 中是正的，并在 Γ_1 上 $\partial w/\partial y = 0$，还有

$$\Delta w = -4\alpha,$$

因此我们有下界

$$\lambda \geqslant \inf_D \frac{4\alpha}{1-\alpha(x^2+y^2)} = 4\alpha.$$

因为 α 是任何小于 1 的数，我们求得

$$\lambda \geqslant 4.$$

当 $\alpha < \pi/2$ 时选择 $w = \cos\alpha\sqrt{x^2+y^2}$，可导出改进的界 $\lambda \geqslant$

$\pi^2/2$. 事实上，可以证明最小特征值是

$$\lambda_1 = 5.76.$$

在上例中我们实际上假设了(11)，(12)的所有特征值都是实的．要证明确实如此也很简单．我们回忆 Green 第二恒等式

$$\int_D (v\Delta u - u\Delta v)dV = \int_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)dS.$$

假设 u 是(11)，(12)的解而令 $v = \bar{u}$，于是就有

$$\int_D (\bar{u}\Delta u - u\Delta \bar{u})dV = \int_{\partial D}\left(\bar{u}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial \bar{u}}{\partial \boldsymbol{n}}\right)dS = 0,$$

或

$$(\bar{\lambda} - \lambda)\int_D |u|^2 dV = 0. \tag{13}$$

如果 λ 不是实数，那么 $\bar{\lambda} - \lambda \neq 0$，从(13)可得 $u \equiv 0$，所以 λ 就不是特征值．这样一来特征问题(11)，(12)的所有的特征值必为实数．

习　　题

1. 设 D 是正方形：$|x|<1, |y|<1$．求问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0 \quad 在\ D\ 中,$$

$$u = 0 \quad 在\ \partial D\ 上$$

的第一特征值的下界．

2. 设 D 是正方形：$|x| < \frac{1}{2}\pi$，$|y| < \frac{1}{2}\pi$．证明问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0 \quad 在\ D\ 中,$$

$$u = g(x, y) \quad 在\ \partial D\ 上$$

的解是唯一的．对于正方形 $|x| < \pi/\sqrt{2}$，$|y| < \pi/\sqrt{2}$，同样的结果是否成立？

第九节 Phragmèn-Lindelöf 原理

我们借助最大值原理已经证明的唯一性和逼近定理能用到有界区域上，但是不能用到无界区域上去。例如，函数

$$u(x,y)=e^x\sin y$$

在带形区域 $|y|<\pi$ 中满足 Laplace 方程并在边界 $y=\pm\pi$ 上等于零。可是，在带域中 u 既取正值又取负值，所以无论最大值还是最小值都不在边界上达到。因为函数 $u\equiv 0$ 在带域 $|y|<\pi$ 中也满足 $\Delta u=0$，在边界上也满足 $u=0$，对这个无界区域也破坏了唯一性定理。

在本节中，我们将通过对函数在无穷远处的增长加上某些限制而建立一类无界区域上的最大值原理。同时，我们还将建立有界区域中给定的边界数据有间断的解的最大值原理。当规定的边界条件在边界的一部分上和别的部分上不相同时，常会产生这种间断。例如，在 ∂D 的 Γ_2 部分上可以规定边界函数 u，而在 ∂D 的另一部分 Γ_1 上却规定组合 $(\partial u/\partial \nu)+\alpha u$。尽管我们要求 Γ_1 与 Γ_2 的闭包的并集构成 ∂D，但沿着 Γ_1 和 Γ_2 的公共边界没有规定边界数据是非常可能的。如同第四节和第六节中那样，这些最大值原理导致唯一性和逼近定理。

为阐明 Phragmèn-Lindelöf 原理，我们首先建立一个关于在平面上无界扇形中下调和函数的增长性的古典结果。

设 D 是由不等式 $-cx<y<cx, x>0$ 定义的扇形。引进极坐标 (r,θ) 并把 D 的边界方程写作 $\theta=\pm\pi/2\alpha$，其中 $c=\operatorname{tg}(\pi/2\alpha)$，将会带来方便。（见图 11.）函数

$$w=r^\alpha\cos\alpha\theta$$

在扇形 D 中是调和的，在 D 的边界上等于 0。把 Laplace 方程写成极坐标形式

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},$$

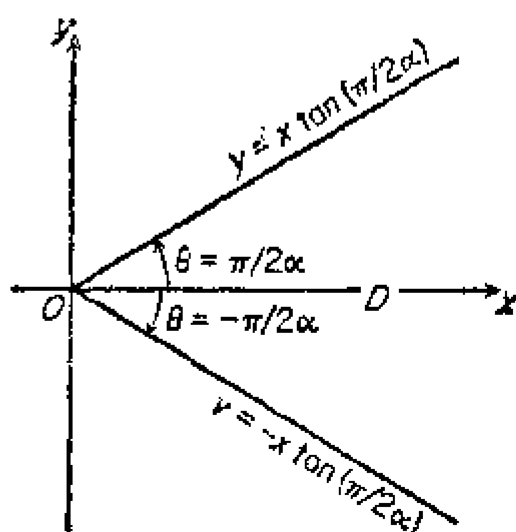


图 11

容易验证w是调和函数. 这样我们有了一个无界调和函数的例子，在它有定义的扇形的全部边界上它等于零. 当$r\to\infty$时在每条射线$\theta=$常数上这个函数象r^{α}一样地趋向于无穷. Phragmèn-Lindelöf 定理断言当$r\to\infty$时上述函数w的这种增长性是扇形区域中无界的调和函数的特征，即任何不恒等于零但又在边界上等于零的调和函数必须和r^{α}增长得一样快. 而且，如果一个调和函数(或下调和函数)沿着张角为π/α的扇形D的整个边界有界，又若$r\to\infty$时它增长得比r^{α}慢，那么这个函数完全不增长.

定理 18 (Phragmèn-Lindelöf). 设u在一个张角为π/α的扇形D中满足不等式

$$\Delta u\geqslant 0.$$

假设在边界$\theta=\pm\pi/2\alpha$上$u\leqslant M$并且假设[1]

$$\liminf_{R\to\infty}\{R^{-\alpha}\max_{r=R}u(r,\theta)\}\leqslant 0,$$

则在D中$u\leqslant M$.

证明. 对固定数R，我们考虑由射线$\theta=\pi/2\alpha$，$\theta=-\pi/2\alpha$和圆周$r=R$上的一段弧所包围的区域D_R，区域D_R包含在D中

1) 下极限$\liminf\limits_{R\to A}F(R)$定义为具有以下性质的数$a$中的最小数(可能是$\pm\infty$)，存在序列$R_n\to A$使当$R_n\to A$时$F(R_n)\to a$. 上极限可类似定义，所以$\limsup\limits_{R\to A}F(R)=-\liminf\limits_{R\to A}[-F(R)]$.

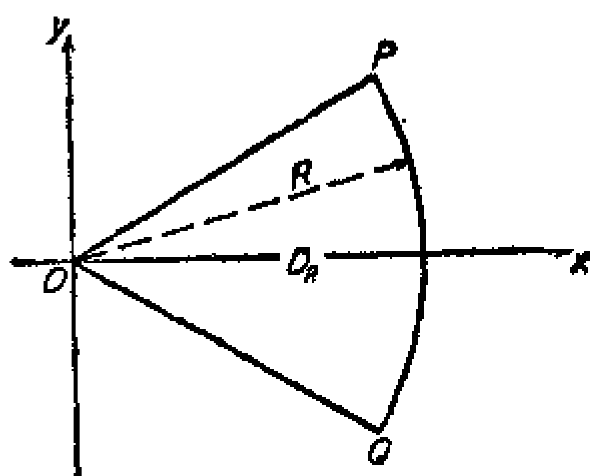


图 12

(见图 12).

证明的主要方法在于确定 D_R 中的一个调和函数，它保持有界，且下界为正或上界为负，当 $R\to\infty$ 时有适当的增长性. 在最大值原理中用这个函数来作比较函数. 具有这些性质的一个函数是

$$w_R(r,\theta)=1+\frac{2}{\pi}R^{\alpha}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2R^{\alpha}r^{\alpha}\cos\alpha\theta}{R^{2\alpha}-r^{2\alpha}}.$$

容易验证这个函数在 D_R 中调和[1]，当 $\theta=\pm\pi/2\alpha$，$0\leqslant r<R$ 时它取值为 1，而当 $r=R$，$-(\pi/2\alpha)<\theta<(\pi/2\alpha)$ 时它取值为 $1+R^{\alpha}$. 函数

$$v(r,\theta)=\frac{u(r,\theta)-M}{w_R(r,\theta)}$$

满足微分不等式

$$\Delta v+\frac{2}{w_R}\operatorname{grad} w_R\cdot\operatorname{grad}v\geqslant 0,$$

所以，由第三节定理 5 知，v 在 D_R 中满足最大值原理. 根据假设，在射线 $\theta=\pm\pi/2\alpha,0\leqslant r<R$ 上 $v\leqslant 0$. 在弧$\{r=R,\ -(\pi/2\alpha)<\theta<(\pi/2\alpha)\}$ 上还有

---

1) 注意到复变量 $z=re^{i\theta}$ 的解析函数的实部和虚部都是调和的就能最简单地作出这一验证；而函数 w_R 是解析函数 $f(z)=i+\frac{2}{\pi}R^{\alpha}\log\frac{R^{\alpha}+iz^{\alpha}}{R^{\alpha}-iz^{\alpha}}$ 的虚部.

$$v(R,\theta) \leqslant \frac{\max\limits_{(-\pi/2\alpha)\leqslant\theta\leqslant(\pi/2\alpha)} [u(R,\theta) - M]}{1 + R^{\alpha}}.$$

定理 5 表明对 D_R 中所有的 (r,θ):

$$v(r,\theta) = \frac{u(r,\theta) - M}{w_R(r,\theta)} \leqslant \max\left\{0, \frac{\max\limits_{r=R}[u(r,\theta) - M]}{1 + R^{\alpha}}\right\},$$

或

$$u(r,\theta) \leqslant M + w_R(r,\theta)\max\{0,(1+R^{\alpha})^{-1}\max_{r=R}[u(r,\theta) - M]\}. \tag{1}$$

现保持 (r,θ) 固定并令 $R \to \infty$，容易验证 $w_R(r, \theta)$ 保持有界. 事实上，L'Hôpital 法则给出

$$\lim_{R\to\infty} R^{\alpha}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2R^{\alpha}r^{\alpha}\cos\alpha\theta}{R^{2\alpha} - r^{2\alpha}} = 2r^{\alpha}\cos\alpha\theta.$$

根据假设存在一个趋向无穷的半径序列 $R_n, n = 1,2,\cdots$,具有性质：对任何 $\varepsilon > 0$ 存在整数 N，使得当 $n \geqslant N$ 时就有 $(1 + R_n^{\alpha})^{-1} \cdot \max\limits_{r=R}[u(r,\theta) - M] < \varepsilon$. 从(1)我们得到:

$$u(r,\theta) < M + \varepsilon w_{R_n}(r, \theta)$$

在 D_{R_n} 中成立. 因为当 n 充分大时 D 中每一点 (r,θ) 必在 D_{R_n} 中,令 $\varepsilon \to 0$ 和 n 趋向无穷,我们就证明了定理.

附注. (i)从第一节定理 2 现可得出结论：在 D 中 $u < M$,除非 $u \equiv M$.

(ii) 如果 D^* 是包含在张角为 π/α 的扇形内的任何区域，又若在 D^* 的边界上 u 不超过 M，那么，因为在整个 D_R 上 $1 \leqslant w_R \leqslant 1 + R^{\alpha}$, 所以上面的证明给出了有相同指数 α 的同样的 Phragmèn-Lindelöf 定理.

(iii) 我们只需简单地取 $\alpha = 1$，同样的论证就给出了定义在半平面上的函数的结果;对于 $\alpha < 1$ 证明也还有效.

(iv) 定理 18 的结果表明，如果定义在扇形或半平面中的下调和函数无上界，则在某个趋向无穷的点列上至少该函数必同 r^{α}

一样快地趋向无穷。

定理 18 中所给的基本论证法可以应用于更加一般的情形。现在我们把这个定理推广到不仅包括更一般的椭圆型算子，而且包括无论区域有界或无界的情形上去。

设 L 是一个定义在 n 维区域 D 中的一致椭圆型二阶算子．假设 u 满足

$$(L + h(\boldsymbol{x}))[u] \geqslant 0 \quad \text{在}D\text{中}, \tag{2}$$

其中 $h(\boldsymbol{x})$ 可以是正的。区域 D 可以有界也可以无界．设 Γ 是 ∂D 的一个子集，它也可以是整个 ∂D．假设给定

$$u \leqslant 0 \quad \text{在}\Gamma\text{上}.$$

我们希望加上一些附加的充分条件以得出结论

$$u \leqslant 0 \quad \text{在}D\text{中}. \tag{3}$$

例如，若 D 是定理 18 中的扇形，并且 $\Gamma = \partial D$，那么，对 $L \equiv \Delta$ 和 $h \equiv 0$ 的情形，增长条件 $R^{-\alpha}\max u(R, \theta) \to 0$ 就给出(3)．如果 $\Gamma \equiv \partial D$ 并且 D 有界，那么(3)就是第五节定理 10 给出的结果．所以，有兴趣的是或者 Γ 是 ∂D 的真子集或者 D 无界的那些情形。

给定区域 D 以及 ∂D 的一部分 Γ，我们假设可以找到具有以下性质的增大的有界区域序列 $D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_k \cdots$：

(i) 每个 D_k 包含在 D 中；对每点 $\boldsymbol{x} \in D$，存在整数 N 使得 $\boldsymbol{x} \in D_N$（因此，对所有 $k \geqslant N$ $\boldsymbol{x} \in D_k$）。

(ii) 每个 D_k 的边界由两部分 Γ_k 和 Γ_k' 组成，其中 Γ_k 是 Γ 的一个子集而 Γ_k' 是 D 的一个子集．

假设在每个区域 D_k 上，存在具有以下性质的函数 $w_k(\boldsymbol{x})$：

$$\left.\begin{aligned} &w_k(\boldsymbol{x}) > 0 \quad \text{在 } D_k \cup \partial D_k \text{ 上}, \\ &(L + h)[w_k] \leqslant 0 \quad \text{在 } D_k \text{ 中}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

定理 19 (Phragmèn Lindelöf 原理)．设 D 是一个有界或无界的区域，又设 u 满足

$$(L + h)[u] \geqslant 0 \quad \text{在}D\text{中},$$

$$u \leqslant 0 \quad \text{在}\Gamma\text{上},$$

其中 Γ 是 ∂D 的一个子集. 假设存在一个具有上面性质(i)和(ii)的增大的区域序列 $\{D_k\}$, 并假设存在一个满足(4)的序列 $\{w_k\}$. 又设存在一个有下述性质的函数 $w(\boldsymbol{x})$: 在 D 的每一点 $\boldsymbol{x}$,对超过某整数 $N_{\boldsymbol{x}}$ 的所有 k,不等式

$$w_k(\boldsymbol{x}) \leqslant w(\boldsymbol{x})$$

成立。如果 $u(\boldsymbol{x})$ 满足增长条件

$$\liminf_{k\to\infty}\left[\sup_{\boldsymbol{x}\in\Gamma_k'} \frac{u(\boldsymbol{x})}{w_k(\boldsymbol{x})}\right] \leqslant 0, \tag{5}$$

则在 D 中

$$u \leqslant 0.$$

证明. 我们作函数

$$v_k = \frac{u}{w_k}$$

并注意到由定理 10 知,在 D_k 中 v_k 满足最大值原理. 因为 $\Gamma_k \subset \Gamma$ 又因为根据假设,在 Γ 上 $u \leqslant 0$,我们有

$$v_k \leqslant 0 \quad 在\ \Gamma_k\ 上.$$

而在 Γ_k' 上有

$$v_k \leqslant \sup_{\boldsymbol{x}\in\Gamma_k'} \frac{u(\boldsymbol{x})}{w_k(\boldsymbol{x})}.$$

因此,当 $\boldsymbol{x} \in D_k$ 时,我们发现

$$v_k(\boldsymbol{x}) = \frac{u(\boldsymbol{x})}{w_k(\boldsymbol{x})} \leqslant \max\left\{0, \sup_{\boldsymbol{x}\in\Gamma_k'} \frac{u(\boldsymbol{x})}{w_k(\boldsymbol{x})}\right\},$$

并且,因为 $w_k(\boldsymbol{x}) \leqslant w(\boldsymbol{x})$,

$$u(\boldsymbol{x}) \leqslant \max\left\{0, \sup_{\boldsymbol{x}\in\Gamma_k'} \frac{u(\boldsymbol{x})}{w_k(\boldsymbol{x})}\right\} w(\boldsymbol{x}).$$

不等式(5)说明存在具有以下性质的下标序列 $k_n \to \infty$: 对任何 $\varepsilon > 0$,存在整数 N,使得当 $n \geqslant N$ 时 $\sup\limits_{\Gamma_{k_n}}[u/w_{k_n}] < \varepsilon$. 由此得出在 D_{k_n} 中 $u(\boldsymbol{x}) \leqslant \varepsilon w(\boldsymbol{x})$. 令 ε 趋于零, n 趋于无穷,我们就得到

了在D中 $u(x)\leqslant 0$ 的结论。

附注. (i)如果 $h\equiv 0$，可用 $u-M$代替u，其中M是任何常数。于是，在定理 19 的假设和结论中的 $u\leqslant 0$ 都可以用 $u\leqslant M$ 代替。如果$h(x)\leqslant 0$,那么对非负的M同样的命题成立。

(ii) 一旦具有适当性质的区域 $\{D_k\}$ 和函数 $\{w_k\}$ 确定下来，Phragmèn-Lindelöf 原理就能用。在定理 18 中，$\{D_k\}$是半径为 R_k 的圆扇形，而 $\{w_k\}$ 用显式公式给出。 下面我们要给出另外的例子。

例. 设u在由一条或若干条闭曲线Γ的外部构成的平面区域D中满足

$$\Delta u\geqslant 0.$$

取一个原点在Γ内侧的极坐标系，选取半径为R_n的圆域序列$\{K_n\}$ 使得 $R_n\to\infty$ 并且每个 ∂K_n 都在D中。定义

$$D_n=D\cap K_n$$

和

$$w_n(r,\theta)=\log\frac{r}{r_0}\quad 当\ r_0<r<R_n\ 时,$$

其中圆周 $r=r_0$ 充分小使它整个位于$D\cup\Gamma$的补集中. 假设在Γ上 $u\leqslant M$ 而且

$$\liminf_{R\to\infty}\left[\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\frac{u(R,\theta)}{\log R}\right]=0.$$

我们注意如果适当地选择序列$\{R_n\}$，则 $\{D_n\}$ 和 $\{w_n\}$ 满足定理的全部假设,其中 $\Gamma_n=\Gamma,\Gamma_n'=\{r=R_n,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$,并且 w_n 在 D_n 中是正值调和函数. 我们得到

$$u\leqslant M$$

在D中成立。换句话说,如果u在Γ的外部是下调和的,在Γ上有界,又当$R\to\infty$时 $u(R,\theta)$ 不如 $\log R$ 增长得快,则u必处处有界。在第十二节中我们将会看到，这个结果也可以从 Hadamard 的三圆周定理得到。

Phragmèn-Lindelöf 原理的上述应用给出了一个外边值问题的唯一性定理。假设

$$\Delta u = f \quad 在 D 中,$$
$$u = g \quad 在 \partial D 上$$

有两个解 u_1 和 u_2，又设当 $r \to \infty$ 时 u_1 和 u_2 都不如 $\log r$ 增长得快;即假设

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\max\limits_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} u_i(r, \theta)}{\log r} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{6}$$

于是 $u_1 - u_2$ 和 $u_2 - u_1$ 都在 D 中调和，都在 ∂D 上等于零。应用 Phragmèn-Lindelöf 原理(定理 19),所以在 D 中 $u_1 - u_2 \leqslant 0$ 和 $u_2 - u_1 \leqslant 0$ 成立。我们得到 $u_1 \equiv u_2$。注意假设(6)是本质的，因为函数 $\log r$ 在 $r = 1$ 上为零,可以把它加到定义在特殊区域 D_1:$\{r > 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ 中的任何解上去。因此,如果允许和 $\log r$ 同样速度增长,就没有唯一性了。

在上面的例中，当 $r_0 < r < R_n$ 时我们选取了 $w_n = \log(r/r_0)$，我们看见 w_n 不过是函数 $w = \log(r/r_0)$ 在环域 $r_0 < r < R_n$ 上的限制。而函数 w 具有定理 19 要求的全部性质，一旦有这样一个函数可用，无需乎中间步骤就可得到定理的结论。把这种特殊情况叙述成一个推论。

推论. 假设 u,D 和 Γ 如定理 19 所设，并且存在具有以下性质的函数 $w(\boldsymbol{x})$:

$$\left.\begin{aligned} & w > 0 \quad 在 D \cup \partial D 上, \\ & (L + h)[w] \leqslant 0 \quad 在 D 中, \\ & \lim_{\boldsymbol{x} \to \partial D - \Gamma} w(\boldsymbol{x}) = \infty, \\ & \lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} w(\boldsymbol{x}) = \infty \quad 若 D 无界. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

如果在 ∂D 上 $u \leqslant 0$ 且

$$\liminf_{A \to \infty} \left[\sup_{\substack{w(\boldsymbol{x}) = A \\ \boldsymbol{x} \in D}} \frac{u(\boldsymbol{x})}{w(\boldsymbol{x})} \right] \leqslant 0,$$

则在 D 中

$$u \leqslant 0.$$

现在举例说明推论在有界区域问题上的应用。

例. 设D是平面有界区域,又假设u满足

$$\left.\begin{aligned} \Delta u \geqslant 0 \quad & \text{在} D \text{中}, \\ u \leqslant 0 \quad & \text{在} \partial D \text{上除点} P \text{外}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

令P为坐标原点并用d表示D的直径。我们要在推论中使用调和函数

$$w = \log \frac{2d^2}{x^2 + y^2}.$$

显然在$D \cup \partial D$上$w > 0$. 推论说明如果

$$\liminf_{r \to 0} \left[\frac{\sup_{x^2+y^2=r^2} u(x,y)}{\log(1/r)} \right] \leqslant 0, \tag{9}$$

则$u \leqslant 0$.

对平面有界区域来说,因为在边界上只有一个例外点,看来好象只要有条件(8)就能推出$u \leqslant 0$处处成立。可是,函数

$$u(x,y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{(x+1)^2 + y^2} \tag{10}$$

在单位圆域D: $\{x^2 + y^2 < 1\}$中调和,除一点$P(-1, 0)$外在边界上处处为零,但是它在D中处处为正。因此,为了得到在内部$u \leqslant 0$的结论,象(9)那样的条件是必要的。

如果除有限个边界点$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $\cdots$, $P_k(x_k, y_k)$外在有界平面区域D的边界上$u \leqslant 0$,则我们选取

$$w = \sum_{i=1}^{k} \log \frac{2d^2}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \tag{11}$$

若在每点P_i上都满足增长条件(9),则可从推论得出在整个D上$u \leqslant 0$.

我们还可以重新导出一个第一边值问题的唯一性定理。如果给定边值问题

$$\Delta u = f \quad \text{在} D \text{中}, \tag{12a}$$

$$u = g \quad \text{在} \partial D \text{上} \tag{12b}$$

的两个解 u_1 和 u_2，其中 g 在边界上除去有限个点 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 外是连续的．在这些点上 g 没有定义． 我们要确定使 u_1 和 u_2 重合的条件．假定 u_1 和 u_2 除去 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 外在 ∂D 的所有点上满足 (12b)．我们还假设 u_i/w，$i = 1, 2$ (其中 w 由(11)给定)当 $w \to \infty$ 时，在 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 点趋向于零．特别是只要假设 u_1 和 u_2 有界就足够了． 我们得到在 D 中 $u_1 - u_2 \leqslant 0$ 又在 D 中 $u_2 - u_1 \leqslant 0$．因此 $u_1 \equiv u_2$．

函数(10)这个例子表明对唯一性定理来说一个增长条件是必需的． 函数(10)与 $[(x+1)^2 + y^2]^{-1/2}$ 同样增长，当然它比 $\log[(x+1)^2 + y^2]$ 增长得更快．事实上，如果把原点取作例外边界点，又若边界充分光滑使区域 D 位于某个圆周 $(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$ 的外面，那么，我们可以在推论中利用调和函数

$$w = 1 - \frac{x\bar{x} + y\bar{y}}{x^2 + y^2},$$

并在增长条件(9)中用$(1/r)$来代替 $\log(1/r)$． 若有几个这样的例外点，我们可以利用这样函数 w 的和．

用同样的方法可以得到 n 维 $(n \geqslant 3)$ 情形下调和函数的增长条件和唯一性定理．假设 u 满足

$$\Delta u \geqslant 0 \quad \text{在 } D \text{ 中},$$

$$u \leqslant 0 \quad \text{在 } \partial D \text{ 上除 } P(x_1^0, x_2^0, \cdots x_n^0) \text{ 点外}.$$

对有界区域 D，调和函数

$$w(x) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2\right]^{-(n-2)/2} \tag{13}$$

满足推论的所有条件．所以，如果

$$\liminf_{R \to 0} [R^{n-2} \sup_{|x - x^0| = R} u(x)] \leqslant 0,$$

则在 D 中 $u \leqslant 0$．若有有限个例外边界点，我们选取类型(13)的函数的和作为 w．和前面一样，若在例外点处边界充分光滑，在增长条件中可用 R^{n-1} 代替 R^{n-2}．

可以和二维情况完全一样地建立边值问题

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta u = f & \text{在} D \text{中},\\ u = g & \text{在} \partial D \text{上除} P_1, \cdots, P_k \text{外}\end{array}\right\} \tag{14}$$

的唯一性定理.

一般来说,边值给定在$(n-1)$维曲面上,而间断将沿$(n-2)$维曲面发生. 特别是如果 $n=3$, 边值的间断将沿 ∂D 上一条一维曲线 C 或一组这样的曲线发生. 设 C 是 ∂D 上一条光滑的一维曲线,可借助其弧长 s 为参数给出:

$$C: x=\xi(s), y=\eta(s), \ z=\zeta(s), \ 0 \leqslant s \leqslant l.$$

容易验证函数

$$w(x,y,z) = \int_0^l \{[x-\xi(s)]^2 + [y-\eta(s)]^2 + [z-\zeta(s)]^2\}^{-1/2} ds \tag{15}$$

对不在 C 上的 (x,y,z) 是调和的. 又当 (x,y,z) 趋于 C 上一点时 $w \to \infty$. 因此, 我们可以在推论中利用这个函数, 得到结论: 在(14)的有界解类中, 除曲线 C 外具有同样边值的任何两个解确实上在 D 中处处重合. 更一般地, 对满足适当的增长条件的解我们得到同样的结论.

现在假设集合 $D \cup (\partial D - \Gamma)$ 本身是由 Γ 围住的区域. 即我们假设例外边界点 $\partial D - \Gamma$ (用 $\sum$ 表示)是 D 的闭包的内点. 假设存在 $D \cup \sum$ 的一个有界子区域 D', 把例外点集 $\sum$ 包含在其内部(见图 13), D' 有下述性质: 对任意连续可微的边值 φ 使边值问题

$$(L+h)[v] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial v}{\partial x_i} + h(\boldsymbol{x}) v = 0 \quad \text{在 } D' \text{ 中},$$

$$v = \varphi \quad \text{在 } \partial D' \text{ 上可解}.$$

此外, 假设存在函数 w 具有性质: 在 $D' - \sum$ 中 $(L+h)[w] \leqslant 0$, 在 $D' \cup \partial D' - \sum$ 中 $w > 0$, $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \sum} w(\boldsymbol{x}) = \infty$.

设 u 是 $(L+h)[u]=0$ 在 D 中的一个解,当 $w \to \infty$ 时 $u/w \to 0$. 设 v 是问题: 在 D' 中 $(L+h)[v]=0$,在 $\partial D'$ 上 $v=u$ 的解. 那么在 $D' - \sum$ 中 $(L+h)[u-v]=0$, 当 $w \to \infty$ 时

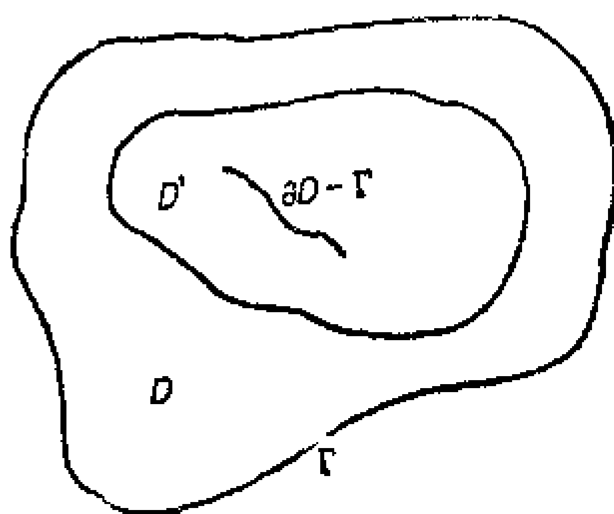


图 13

$(u-v)/w \to 0$，并且在 $\partial D'$ 上 $u-v=0$. 因此，由推论知 $u-v\equiv 0$. 这样一来在集合 $\sum$ 附近 u 等于二次连续可微函数 v. 换句话说，如果在集合$\sum$上适当地定义 u（即定义 $u\equiv v$），可把 u 延拓为 $(L+h)[u]=0$ 在整个区域 $D\cup\sum$ 中的解。于是，我们就说 u 在$\sum$上有**可去奇性**.

我们已证明，若边值问题在 D' 中可解，则在 D 中 $(L+h)[u]=0$ 的任何满足当 $w\to\infty$ 时 $u/w\to 0$ 的解 u，在$\sum$上具有可去奇性.

例如，当 $0<x^2+y^2<R^2$ 时 $\Delta u=0$，我们令 $w=-\log(x^2+y^2)$ 而 D' 是 $x^2+y^2<\left(\frac{1}{2}R\right)^2$. 因为圆域上 Laplace 方程的边值问题可解，所以我们得出结论：在有孔圆域 $0<x^2+y^2<R^2$ 中的任何调和函数 u，若当 $x^2+y^2\to 0$ 时满足 $u/\log(x^2+y^2)\to 0$，则当 $x^2+y^2\to 0$ 时 u 有极限，而且把 $u(0,0)$ 定义为这个极限所得到的函数在整个圆域 $0\leqslant x^2+y^2<R^2$ 中调和.

为了把推论和上面的附注应用于 n 个自变量的一般算子 $L+h$，我们必须构造一个适当的函数 $w(\boldsymbol{x})$. 现在来说明对 ∂D 上只有唯一例外点 $\boldsymbol{O}$ 的有界区域可以怎样构造这个函数. 取 $\boldsymbol{O}$ 为坐标原点，并限于考虑在 D 中

$$h\leqslant 0$$

的情形。

回想起L中二阶项的系数是对称矩阵$(a_{ij}(\boldsymbol{x}))$的元素，我们设常数矩阵(A_{ij})是系数矩阵$(a_{ij}(\boldsymbol{O}))$的逆矩阵。定义量

$$\rho=\left\{\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}x_i x_j\right\}^{1/2}.$$

我们要来证明，如果 $n\geqslant 3$，只要L的系数充分光滑，函数[1]

$$w=\rho^{2-n}+c\rho^{2-n+\varepsilon}+K[e^{\alpha d}-e^{\alpha x_1}],$$

就具有所要求的性质，其中ε是0与1之间的一个固定常数，而c,d,α和K是适当的常数。

由计算得出

$$\begin{aligned}
&(L+h)[\rho^{2-n}+c\rho^{2-n+\varepsilon}]\\
&=\rho^{-n-2}[n(n-2)+c(n-\varepsilon)(n-2-\varepsilon)\rho^{\varepsilon}]\\
&\quad\times\sum_{i,j,k,l} a_{kl}(\boldsymbol{x})A_{ik}A_{jl}x_i x_j-\rho^{-n}[n-2+c(n-2\\
&\qquad-\varepsilon)\rho^{\varepsilon}]\sum_{k,l} a_{kl}(\boldsymbol{x})A_{kl}-\rho^{-n}[n-2+c(n-2\\
&\qquad-\varepsilon)\rho^{\varepsilon}]\sum_{i,j} A_{ij}b_i x_j+h\rho^{2-n}[1+c\rho^{\varepsilon}].
\end{aligned}$$

现在我们记

$$a_{ij}(\boldsymbol{x})=a_{ij}(\boldsymbol{O})+[a_{ij}(\boldsymbol{x})-a_{ij}(\boldsymbol{O})]$$

并利用恒等式

$$\sum_{p=1}^{n} a_{pq}(\boldsymbol{O})A_{pr}=\delta_{qr}=\begin{cases}1 & 当\ q=r\\ 0 & 当\ q\neq r.\end{cases}$$

这样，我们得到

$$\begin{aligned}
(L+h)[\rho^{n-2}+c\rho^{n-2+\varepsilon}]&=-c\varepsilon(n-2-\varepsilon)\rho^{-n+\varepsilon}\\
&\quad+\rho^{-n}[n(n-2)+c(n-\varepsilon)(n-2-\varepsilon)\rho^{\varepsilon}]\\
&\quad\times\left\{\sum_{i,j,k,l}[a_{kl}(\boldsymbol{x})-a_{kl}(\boldsymbol{O})]A_{ik}A_{jl}\frac{x_i x_j}{\rho^2}\right\}
\end{aligned}$$

---

1) 我们注意到若(a_{ij})是一个常数矩阵，则除$\rho=0$外$L_1[\rho^{2-n}]=0$，其中L_1是L的主部。

$$
\begin{aligned}
&-\rho^{-n}[n-2+c(n-2-\varepsilon)\rho^{\varepsilon}]\sum_{k,l}[a_{kl}(\boldsymbol{x})\\
&-a_{kl}(\boldsymbol{O})]A_{kl}-\rho^{-n}[n-2+c(n-2\\
&\quad-\varepsilon)\rho^{\varepsilon}]\sum_{i,l}A_{ij}b_{i}x_{j}+h(\boldsymbol{x})\rho^{2-n}[1+c\rho^{\varepsilon}].
\end{aligned}
$$

如果 $a_{ij}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{O}$ 附近如此光滑使得量 $\rho^{-\varepsilon}[a_{ij}(\boldsymbol{x})-a_{ij}(\boldsymbol{O})]$ 有界，则我们可选取 c 充分大使得当 $\rho\to 0$ 时 $(L+h)[\rho^{2-n}+c\rho^{2-n+\varepsilon}]\to-\infty$. 例如，若 (a_{kl}) 的元素可微就满足这个光滑性条件.

我们作第二个计算求出

$$
L[e^{\alpha d}-e^{\alpha x_1}]=-(\alpha^2 a_{11}+\alpha b_1)e^{\alpha x_1},
$$

因为 $a_{11}>0$，可选取 α 充分大使得在 $D\cup\partial D$ 上 $-L[e^{\alpha d}-e^{\alpha x_1}]$ 为正. 选取 d 使 $d\geqslant x_1$, 选 K 使

$$
-KL[e^{\alpha d}-e^{\alpha x_1}]\geqslant\max_{D}(L+h)[\rho^{2-n}+c\rho^{2-n+\varepsilon}].
$$

因为 $h\leqslant 0$, 我们知 w 具有性质

$$
(L+h)[w]\leqslant 0 \quad 在 D 中,
$$
$$
w>0 \quad 在 D\cup\partial D 上.
$$

现在应用第 116 页的推论可得，若

$$
(L+h)[u]\geqslant 0 \quad 在 D 中,
$$
$$
u\leqslant 0 \quad 在 \partial D 上除 \boldsymbol{O} 点外,
$$

又若当 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{O}$ 时 u 增长得比 $1/\rho^{n-2}$ 慢，则在 D 中 $u\leqslant 0$.

如果在边界上有有限个例外点，把几个这种类型的函数加起来就可以得到同样的结论. 还有，在 $(n-2)$ 维边界超曲面上 w 可求积分，这表明当规定边界数据时可以漏过这种例外点集.

特别，我们看到若系数 a_{ij} 在点 $\boldsymbol{O}$ 充分光滑，则在 $\boldsymbol{O}$ 的一个去心邻域中 $(L+h)[u]\geqslant 0$ 的有界解不能在 $\boldsymbol{O}$ 点达到最大值. 光滑性限制更少的条件是由 Gilbarg 和 Serrin [1] 给出的. 如果在 $\boldsymbol{O}$ 的某个邻域中第一边值问题可解，我们得到可去奇性定理. 不管 h 的符号是什么，由于 w(其中 $K=0$)的构造使得在原

点的某个邻域中 $(L+h)[w]<0$,所以甚至在 h 有时为正的情形下这些结果也成立.

用 $\log(1/\rho)-c_1\rho^\varepsilon+c_2$ 代替 w 定义中的头两项后,可以用同样的方法处理二维的情形.

由 Gilbarg 和 Serrin 给出的下面的例子证明了,在离开 O 点处无论系数多么光滑,但在 O 点只有系数的连续性是不够的.当 $0<r\leqslant 0.1$ 时函数

$$u(r)=1+\frac{1}{\log r}$$

$(r=\sqrt{x^2+y^2})$是一致椭圆型方程

$$\left[1+\frac{2x^2}{r^2(-\log r-2)}\right]u_{xx}+\frac{4xy}{r^2(-\log r-2)}u_{xy}+\left[1+\frac{2y^2}{r^2(-\log r-2)}\right]u_{yy}=0$$

的解.除在原点外系数无穷次可微,并在原点连续,而这个解显然在原点达到最大值.

上面对 $n>2$ 给出的构造法表明,若系数在 O 点连续,则对任何 $\varepsilon>0$,存在一个满足推论条件的形状为 $\rho^{2-n+\varepsilon}+K[e^{\alpha d}-e^{\alpha r_1}]$ 的函数 w.因此,以 O 点为不可去奇点的 $(L+h)[u]=0$ 的任何解对每个 $\varepsilon>0$ 必定增长得和 $\rho^{2-n+\varepsilon}$ 同样快.Gilbarg 和 Serrin [1] 给出了一个增长得比 ρ^{2-n} 慢的解的例子

现在考虑混合边值问题.假设 u 是

$$(L+h)[u]=f \quad 在 D 中,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}+\alpha u=g_1 \quad 在 \Gamma_a 上,$$

$$u=g_2 \quad 在 \Gamma_b 上$$

的解,其中 Γ_a 和 Γ_b 不相交,但是 $\Gamma_a\cup\Gamma_b$ 可以不是整个 ∂D.用和前面完全一样的方法能够得到对应的 Phragmèn-Lindelöf 定理.我们叙述这个结果.

定理 20. 假设 u 满足

$$(L+h)[u] \geqslant 0 \quad 在 D 中,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u \leqslant 0 \quad 在 \Gamma_a 上,$$

$$u \leqslant 0 \quad 在 \Gamma_b 上,$$

并假设和定理 19(其中 $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$) 中一样能够求得有界区域序列 $\{D_k\}$. 假设和定理 19 中一样能够求得函数序列 $\{w_k(\boldsymbol{x})\}$, 除满足条件(4)外还满足条件: 在 $\Gamma_k \cap \Gamma_a$ 上

$$\frac{\partial w_k}{\partial \nu} + \alpha w_k \leqslant 0.$$

那么在 D 中 $u \leqslant 0$.

Hopf [3],Gilbarg [1,4],Serrin [5],以及 Meyers 和 Serrin[1] 曾经给出 Phragmèn-Lindelöf 原理的其它形式. 进一步的参考文献可在这些论文中找到.

关于有界区域的例外边界点集的定理, 见 Kryżański [2], 他还处理了与解的存在性有关的问题. Picone [5] 和 Leja [1]对于特殊的算子 $\Delta + h$ 得到了这样的结果, 这推广了 Zaremba [1]关于 Laplace 算子的古典结果.

习　　题

1.证明当 $r \leqslant 0.1$ 时 Gilbarg 和 Serrin 考虑过的方程

$$\left[1 - \frac{2x^2}{r^2(2+\log r)}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{4xy}{r^2(2+\log r)}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left[1 - \frac{2y^2}{r^2(2+\log r)}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

是一致椭圆型的. 证明系数在 $x = y = 0$ 不可微.

2.方程

$$[r^2(2+\log r) - 2x^2]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + [r^2(2+\log r) - 2y^2]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (*)$$

是用 $r^2(2+\log r)$ 乘以第 1 题的方程而得, 它与第 1 题的方程等价, 所以 $1+(1/\log r)$ 是(*)的一个解. 证明(*)的系数是可微的. 试解释最大值原

想为什么失效.

3. 证明：若在上半平面 $y>0$ 中的有界二维区域 D 中 $\Delta u=0$，若原点 O 是 D 的边界点，又若

$$\lim_{x^2+y^2\to 0}(x^2+y^2)^{1/2}u=0,$$

则 u 不超过它在 $\partial D-O$ 上的最大值.

4. 证明：若 $u(x,y,z)$ 当 $0<x^2+y^2+z^2<R_0^2$ 时满足 $\Delta u=0$，又若

$$\lim_{x^2+y^2+z^2\to 0}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}u=0,$$

则可在原点定义 u 使得当 $0\leqslant x^2+y^2+z^2<R_0^2$ 时 u 是调和的.

第十节　Harnack 不等式

最大值原理使我们能够用椭圆型方程的解在边界上的极值来估计它在区域全部内点上的值. Harnack 发现，如果 u 是区域 D 中的正调和函数，那么，在 D 的有界闭子集 S 上任何两点处 u 的比值可用某个只依赖于集合 S 和 D 的常数来估计. 这些估计通常称为 Harnack 不等式，已经证明它们在调和函数理论的发展中是极为有用的.

Harnack 不等式的基础是圆域中 Laplace 方程解的显式公式. 回顾第七节的结果，我们知道如果在以原点为中心 R 为半径的圆域 K_R 中

$$\Delta u=0,$$

则对圆域内部的任何点 $P(\xi,\eta)$，我们有

$$u(\xi,\eta)=-\int_{\partial K_R}u\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}ds, \tag{1}$$

其中 G 是圆域 K_R 的 Green 函数. G 的显式表示式是

$$G=\frac{1}{4\pi}\log\frac{R^4-2R^2(x\xi+y\eta)+(x^2+y^2)(\xi^2+\eta^2)}{R^2[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]}.$$

在边界上法向导数和径向导数是一样的，所以可以直接算出 $\partial G/\partial\boldsymbol{n}$. 采用极坐标是方便的. 在作变量替换 $\xi=r\cos\phi$，$\eta=$

$r\sin\phi, x = R\cos\theta, y = R\sin\theta$ 后，我们求得(见图 14)

$$u(r\cos\phi, r\sin\phi) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(R\cos\theta, R\sin\theta)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\phi) + r^2} d\theta. \tag{2}$$

等式(2)称为圆域中 Laplace 方程解的 Poisson 公式．事实上，直接通过微分法证明(2)右端的积分满足 Laplace 方程是一件简单的事情．只要$P(\xi,\eta)$是 K_R 的内点，容易直接验证积分号下求微商是合法的．若边值连续，则可以证明当 P 趋向于 K_R 的边界时，$u(P)$ 趋于边值．这样 Poisson 公式既提供了圆域上 Dirichlet 问题的一个解又提供了一个存在定理．

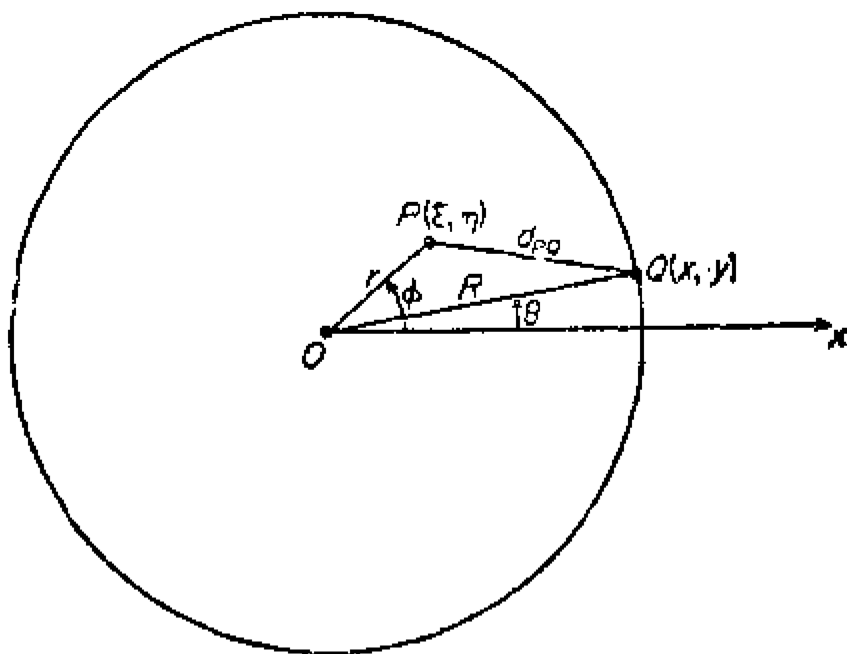


图 14

参阅图 14，其中 P, Q 间的距离记作 d_{PQ}，我们可把(2)改写成

$$u(P) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi R}\int_{\partial K_R} \frac{u(Q)ds_Q}{d_{PQ}^2} \tag{3}$$

的形式，其中 Q 是积分中的变点而 s_Q 是沿 ∂K_R 的弧长．现在，如果 K_R 表示 n 维空间中半径为 R 的球，我们可把 Poisson 公式推广到在边界上有给定的值的 n 维 Laplace 方程的解上去．其结果是

$$u(P) = \frac{R^2 - r^2}{R\omega_n}\int_{\partial K_R} \frac{u(Q)dS_Q}{d_{PQ}^n}, \tag{4}$$

其中 P 是到原点距离为 r 的一个内点，Q 是边界点，d_{PQ} 是距离 $\overline{PQ}$，而 ω_n 是 n 维单位球的表面积．积分(4)满足 n 维 Laplace 方程仍可通过积分号下微分法去验证．

如果 P 是球 K_R 的中心 $\mathbf{O}$，公式(4)给出调和函数的平均值定理[见第一节等式(7)]：

$$u(0,0,\cdots,0)=\frac{1}{R^{n-1}\omega_n}\int_{\partial K_R}u(Q)dS_Q.$$

引理． 设 $u(x,y)$ 是圆域 K_R：$x^2+y^2<R^2$ 中的非负调和函数．如果 $P(x,y)$ 到原点的距离 $r<R$，则

$$\frac{R-r}{R+r}u(0,0)\leqslant u(x,y)\leqslant\frac{R+r}{R-r}u(0,0). \tag{5}$$

证明． 参阅图 14，我们知道对固定的 P，到边界上任何点 Q 的距离 d_{PQ} 满足不等式

$$R-r\leqslant d_{PQ}\leqslant R+r.$$

于是公式(3)和 $u(Q)$ 非负的假设给出估计

$$u(P)\leqslant\frac{R^2-r^2}{2\pi(R-r)^2}\int_0^{2\pi}u(R\cos\theta,R\sin\theta)d\theta.$$

利用调和函数的平均值定理，我们得到

$$u(x,y)\leqslant\frac{R+r}{R-r}u(0,0).$$

用类似的方法可得

$$u(x,y)\geqslant\frac{R^2-r^2}{2\pi(R+r)^2}\int_0^{2\pi}u(R\cos\theta,R\sin\theta)d\theta$$

$$=\frac{R-r}{R+r}u(0,0).$$

附注． 把(5)推广到 n 维调和函数要用到 Poisson 公式(4)．其结果是

$$\frac{R-r}{(R+r)^{n-1}}R^{n-2}u(O)\leqslant u(P)\leqslant\frac{R+r}{(R-r)^{n-1}}R^{n-2}u(O). \tag{6}$$

假设 P_1 和 P_2 是相距小于 $\frac{1}{2}R$ 的两点，又假设 u 在 P_1 为中心 R 为半径的圆域 $K_R(P_1)$ 中调和(图15)。我们能够利用(5)得到 $u(P_1)$ 和 $u(P_2)$ 之间的关系。

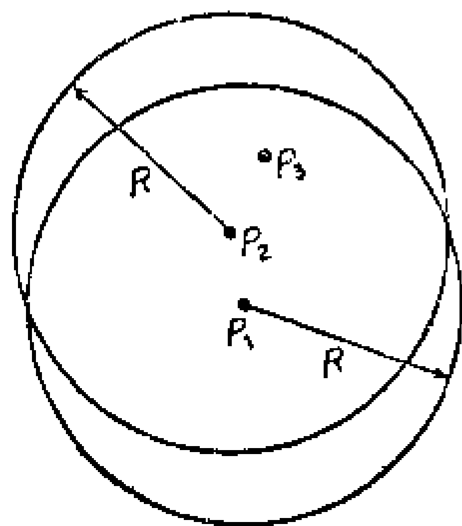


图 15

把上面的引理用到圆域 $K_R(P_1)$ 上，我们求得

$$\frac{R-r}{R+r}u(P_1)\leqslant u(P_2)\leqslant\frac{R+r}{R-r}u(P_1).$$

因为 $r<\frac{1}{2}R$，可以写作

$$\frac{R-\frac{1}{2}R}{\frac{3}{2}R}u(P_1)\leqslant u(P_2)\leqslant\frac{\frac{3}{2}R}{R-\frac{1}{2}R}u(P_1),$$

所以

$$\frac{1}{3}u(P_1)\leqslant u(P_2)\leqslant 3u(P_1). \tag{7}$$

如果 P_3 是与 P_2 距离小于 $\frac{1}{2}R$ 的第三个点，我们又可以把引理用到以 P_2 为中心的圆域上去并推出不等式

$$\frac{1}{3}u(P_2)\leqslant u(P_3)\leqslant 3u(P_2),$$

由此求得

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2u(P_1)\leqslant u(P_3)\leqslant(3)^2u(P_1).$$

对任何有限个点我们可继续这个过程.

如果 S 是区域 D 的有界闭子集，并且 R 小于 S 中任何点到 D

的边界的距离，于是由 Heine-Borel 定理[1]，可用有限的 k 个中心在 S 之中半径为 $\frac{1}{2}R$ 的圆域覆盖 S. 通过选取半径为 R 的同心圆域，我们看到如果 P 和 Q 是 S 中任意两点，它们可以由 D 中的一串 k 个圆域连接起来，使得第一个圆域的中心是点 P，而最后一个圆域的中心是点 Q，并且两个相邻圆域中心间的距离总小于 $\frac{1}{2}R$（图 16）. 重复地利用(7)，对任何调和函数 u 和 S 中任何两点我们得到

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} u(P) \leqslant u(Q) \leqslant 3^{k-1} u(P).$$

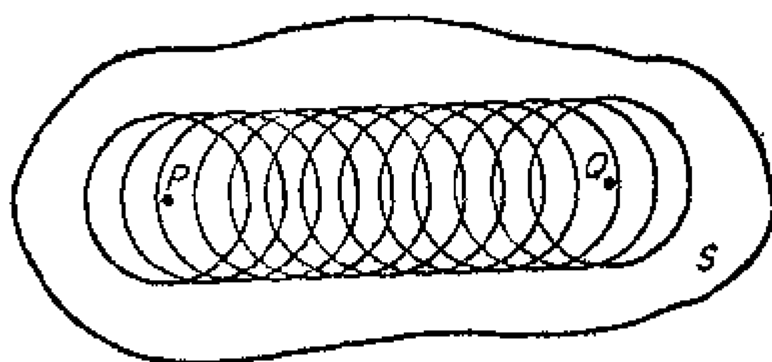


图 16

注意到数 k 只依赖于集合 S 和区域 D. 上述论证给出了下面的结果.

定理 21 (Harnack 不等式). 设 $u(x,y)$ 是定义在区域 D 中的非负调和函数，又设 S 是包含在 D 中的有界闭集合，则存在依赖于 S 和 D 但不依赖于 u 的正常数 A，使得对 S 中的每一对点 P 和 Q，我们有

$$Au(P) \leqslant u(Q) \leqslant A^{-1} u(P). \tag{8}$$

---

1) Heine-Borel 定理说，若一个有界闭子集包含在一族无穷多个开集的并集中，则它一定包含在该族中有限个开集的并集之中. 在现在的情形下，S 当然在中心在 S 之中半径为 $\frac{1}{2}R$ 的所有开圆域的并集之内，因此 S 在有限个这样的圆域的并集当中.

附注. (i)在任何维数的情形,类似的结果都成立.

(ii) 选择相邻中心点彼此相距比$\frac{1}{2}R$还近是为了方便;而任何小于R的距离都可以.

作为定理 21 的简单推论的以下收敛性定理展示了 Harnack 不等式的用处.

定理 22. 设 $u_k(x, y)$, $k = 1,2,\cdots$是区域D中非增调和函数序列. 如果序列$\{u_k\}$在D的一个点$P(x_0, y_0)$上收敛,则它在D的每个有界闭子集上一致收敛.

证明. 我们注意当$i < j$时函数$v_{ij}(x,y) = u_i(x,y) - u_j(x, y)$调和且非负. 如果$S$是$D$的一个有界闭子集, 而$Q(x,y)$是$S$的一个点,把 Harnack 不等式(8)用于 $v_{ij}(x, y)$ 可得

$$0 \leqslant v_{ij}(x,y) \leqslant A^{-1}v_{ij}(x_0,y_0) = A^{-1}[u_i(x_0,y_0) - u_j(x_0, y_0)],$$

因为根据假设$\{u_k(x_0,y_0)\}$收敛,于是当$i,j \to \infty$时$\{v_{ij}(x, y)\}$趋于零. 从而得出结论.

附注. (i) 可以把 Harnack 不等式和收敛性定理应用于有上界或有下界的调和函数上去.如果u以常数m为下界,则调和函数$v = u - m$ 非负, 对v Harnack 不等式有效. 类似地,若u以M为上界,则函数$w = M - u$调和且非负.

(ii) 如果(r,θ)是极坐标,函数

$$u_\varepsilon(r,\theta) = \begin{cases} \log(R/r) & \text{当 } r \geqslant \varepsilon \text{ 时}, \\ \log(R/\varepsilon) + \frac{3}{4} - \frac{r^2}{\varepsilon^2} + \frac{r^4}{4\varepsilon^4} & \text{当 } r \leqslant \varepsilon \text{ 时} \end{cases}$$

在圆域$r<R$中是上调和的而且非负,但是选取ε充分小可使比值$u_\varepsilon(0,\theta)/u_\varepsilon\left(\frac{1}{2}R,\theta\right)$任意大. 所以,对上调和函数类没有 Harnack 不等式. 例子$\frac{3}{4} + \varepsilon + \log(R/\varepsilon) - u_\varepsilon(r,\theta)$ 表明对下调和函数类也没有 Harnack 不等式.

(iii) 假设在整个 n 维空间中 $\Delta u = 0$ 并且 $u \geqslant 0$，则若 P 和 O 是彼此相距为 r 的任意点，对任何 $R > r$ 我们有不等式(6)．令 $R \to \infty$，我们求得

$$u(O) \leqslant u(P).$$

交换 P 和 O 的地位，我们又得出

$$u(P) \leqslant u(O),$$

因此 $u(P) = u(O)$．所以，任何整个 n 维空间中的非负调和函数必是常数．根据上面附注(i)，我们可以得出结论：在整个 n 维空间中有上界或有下界的任何调和函数是常数．这个结论称为 Liouville 定理．

Lichtenstein[1] 和 Feller[1] 已经得到了系数光滑的一般椭圆型方程的 Harnack 型不等式．这里我们介绍由 Serrin[6] 给出的二维情形的一个修正过的证明． Serrin 的证明有两方面的优点：(i)关于系数不作特别的连续性或光滑性的假设，(ii) 在只用最大值原理的意义下其想法完全是初等的．

定理 23．设 $u(x, y)$ 在以 O 为中心 R 为半径的圆域 K_R 中满足方程

$$(L + h)[u] = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + hu = 0,$$
$$h \leqslant 0,$$

又设在 K_R 中

$$u \geqslant 0.$$

假设 L 是一致椭圆型的，并且 L 的系数在 K_R 中有界，则存在一个只依赖于椭圆性常数 μ 和 L 的系数的界 M 的常数 $A > 0$，使得只要 P 和 O 的距离小于 $\frac{1}{2}R$，就有

$$u(P) \geqslant Au(O).$$

证明．假设 $u \not\equiv 0$，则由最大值原理知 $u(O) > 0$．现考虑所有使 $u(P) \geqslant \frac{1}{2}u(O)$ 的点构成的集合．这个集合的包含 O 的特

定分支一定延伸到 K_R 的边界. 因为，否则它的边界就会是一个使 $u=\frac{1}{2}u(O)$ 的集合，而$\frac{1}{2}u(O)$ 小于 $u(O)$. 所以 u 应在一个内点处有相对正最大值，这和椭圆型算子的最大值原理矛盾. 因此，存在一条连接 O 点和边界点 Q 的曲线 Γ，使得沿 Γ

$$u(P)\geqslant\frac{1}{2}u(O).$$

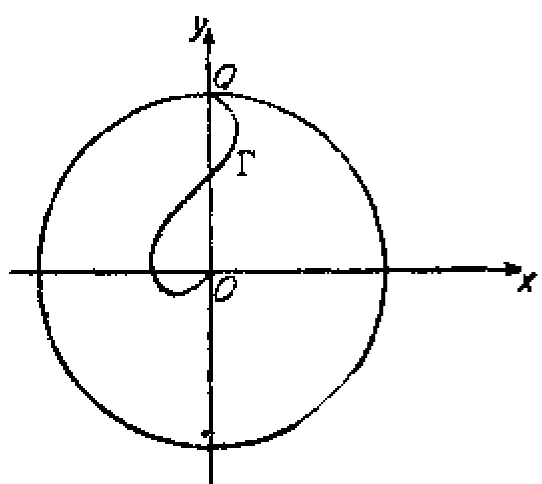


图 17

我们平移和旋转坐标系，使点 O 在原点，而点 Q 在新的 $\bar{x}$, $\bar{y}$ 坐标系的 $\bar{y}$ 轴上(图 17). 如我们在第二节中所见，这个坐标变换把 L 变成一个有有界系数 $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, $\bar{e}$ 的同样形式的新椭圆型算子，并且有同样的椭圆性常数 μ. 为了记号上的方便，我们将去掉"—"仍用字母 x,y 表示新坐标；同样用 a,b,c,d 和 e 表示 L 的新系数.

这里也要利用在以前的应用中极其有用的辅助函数法. 我们引进用公式

$$z_{\pm}=e^{-\alpha T_{\pm}}-1$$

定义的两个函数 z_+ 和 z_-，其中

$$T_{\pm}=\left[\left(y-\frac{1}{2}R\right)^2\pm\frac{1}{3}Rx-\frac{1}{4}R^2\right]R^{-2},$$

而 α 是需要适当确定的正常数. 函数 z_+ 对应于 T_+，而函数 z_- 对应于 T_-. 我们算出 $(L+h)[z_{\pm}]$

$$(L+h)[z_{\pm}]=\alpha^2R^{-2}e^{-\alpha T_{\pm}}\left[\frac{1}{9}a\pm\frac{4}{3}bR^{-1}\left(y-\frac{1}{2}R\right)\right.$$
$$\left.+4cR^{-2}\left(y-\frac{1}{2}R\right)^2\right]$$
$$-\alpha e^{-\alpha T_{\pm}}\left[2cR^{-2}\pm\frac{1}{3}dR^{-1}+2R^{-2}e\right.$$

$$\times\left(y-\frac{1}{2}R\right)\Big]+hz_{\pm}.$$

算子 L 的一致椭圆性断言存在正常数 μ 使不等式

$$a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2\geqslant\mu(\xi^2+\eta^2)$$

对所有的实数 ξ 和 η 成立. 令 $\xi=\pm\frac{1}{3}$, $\eta=2R^{-1}\left(y-\frac{1}{2}R\right)$, 我们发现

$$\left[\frac{1}{9}a\pm\frac{4}{3}bR^{-1}\left(y-\frac{1}{2}R\right)+4cR^{-2}\left(y-\frac{1}{2}R\right)^2\right]$$

$$\geqslant\mu\left[\frac{1}{9}+4R^{-2}\left(y-\frac{1}{2}R\right)^2\right].$$

把这个不等式代入 $(L+h)[z_{\pm}]$ 的表达式,我们得到

$$(L+h)[z_{\pm}]\geqslant R^{-2}e^{-\alpha T_{\pm}}\left\{\alpha^2\mu\left[\frac{1}{9}+4R^{-2}\left(y-\frac{1}{2}R\right)^2\right]\right.$$

$$\left.-\alpha\left[2c\pm\frac{1}{3}dR+2e\left(y-\frac{1}{2}R\right)\right]+hR^2\right\}-h.$$

因为系数 $a,b,\cdots,e,h$ 有界而且 h 非正,我们看出若选取 α 充分大,则在整个圆域 K_R 上

$$(L+h)[z_{\pm}]>0.$$

α 的大小只依赖于 μ 的值和 $L+R$ 的系数的界. $z_{\pm}$ 中的指数项起着特殊的作用. 图 18 给出了抛物线

$$T_+=0:\left(y-\frac{1}{2}R\right)^2+\frac{1}{3}Rx-\frac{1}{4}R^2=0$$

和

$$T_-=0:\left(y-\frac{1}{2}R\right)^2-\frac{1}{3}Rx-\frac{1}{4}R^2=0$$

的大致图形. 我们注意

$$z_+=0\quad 在\ T_+=0\ 上,$$
$$z_-=0\quad 在\ T_-=0\ 上.$$

在抛物线 $T_+=0$ 的左边有

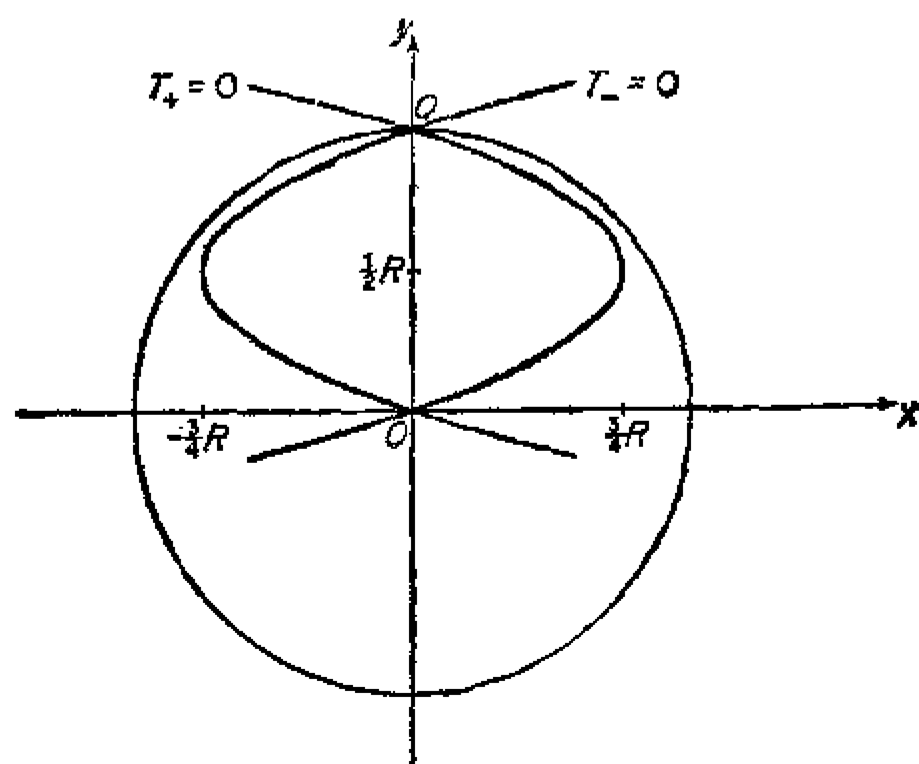


图 18

$$R^2T_+ \equiv \left(y-\frac{1}{2}R\right)^2+\frac{1}{3}Rx-\frac{1}{4}R^2<0,$$

所以 $z_+>0$. 在整个圆域 K_R 中,我们得到

$$-R^2T_+ \equiv \frac{1}{4}R^2-\frac{1}{3}Rx-\left(y-\frac{1}{2}R\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}R^2$$

$$-\frac{1}{3}Rx \leqslant \frac{1}{4}R^2+\frac{1}{3}R^2=\frac{7}{12}R^2.$$

因此,把最后这个不等式代入 z_+ 的表达式, 我们发现在位于抛物线 $T_+=0$ 左边的 K_R 的部分中

$$0<z_+<e^{7a/12}. \tag{9}$$

类似可推出在位于抛物线 $T_-=0$ 右边的 K_R 的部分中

$$0<z_-<e^{7a/12}.$$

因为曲线 Γ 从 O 到 Q,在 Γ 上 $u>\dfrac{1}{2}u(O)$,所以 Γ 必有一段子弧 Γ^* 从 $T_+=0$ 或 $T_-=0$ 上 $y\leqslant 0$ 的部分直接通到点 Q. 用 G 表示图 19 中阴影区域——抛物线之间的区域,设 V 是 G 的任一点,为方便起见,假设它位于有向曲线 Γ^* 的右方. 设 G_V 是由 Γ^*

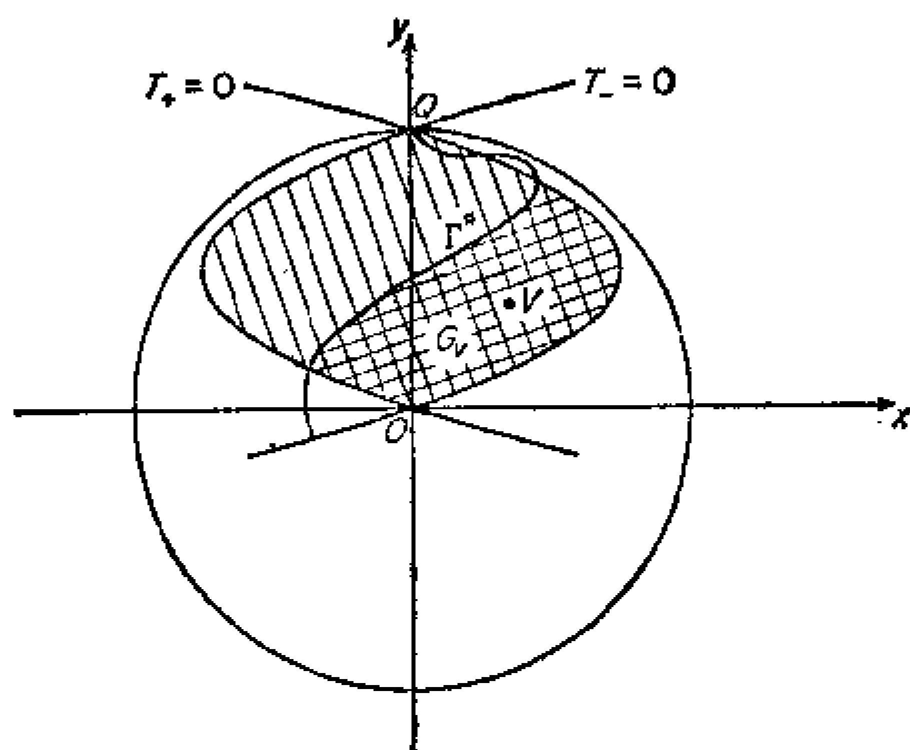


图 19

的弧和抛物线 $T_+=0$ 围成的包含 V 点的最小区域（在图 19 中用重阴影表示）. 我们回想起对于 Γ^* 上的 P 有

$$u(P) \geqslant \frac{1}{2} u(O),$$

因此，考虑到(9)，对位于 G_V 边界的 Γ^* 部分上的点 P 就有

$$u(P) \geqslant \frac{1}{2} e^{-7\alpha/12} u(O) z_+(P). \tag{10}$$

因为在 $T_+=0$ 上 $z_+=0$，于是对 $T_+=0$ 上的点 P 成立的不等式

$$u(P) \geqslant \frac{1}{2} e^{-7\alpha/12} u(O) z_+(P),$$

相当于断言 $u(P) \geqslant 0$. 这样一来，对 G_V 边界上所有的点不等式(10)成立. 而且，我们知道对 $(x,y) \in G_V$

$$(L+h)\left[\frac{1}{2} e^{-7\alpha/12} u(O) z_+ - u\right]$$

$$= \frac{1}{2} e^{-7\alpha/12} u(O)(L+h)[z_+] > 0.$$

所以，由最大值原理知，在 G_V 的边界上成立的不等式(10)必定在它的内部处处成立．因而，特别在点 V 有

$$u(V) \geqslant \frac{1}{2} e^{-7\alpha/12} u(O) z_+(V).$$

类似地，若 V 是 Γ^* 左边的 G 的任何点，我们得到

$$u(V) \geqslant \frac{1}{2} e^{-7\alpha/12} u(O) z_-(V).$$

这样就得到结论，对 G 的任何点 V

$$u(V) \geqslant \frac{1}{2} e^{-7\alpha/12} u(O) \min(z_+(V), z_-(V)). \qquad (11)$$

由

$$I: \quad -\frac{3}{4} R < x < \frac{3}{4} R, \ y = \frac{1}{2} R$$

定义的线段 I 在 G 中(见图 20)．沿 I，不等式(11)给出

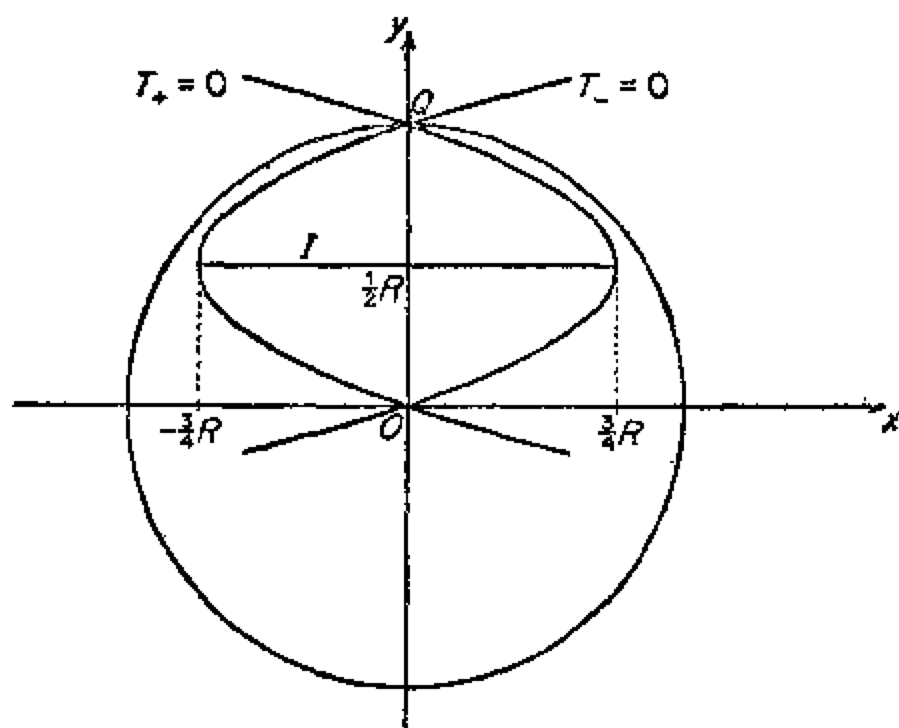


图 20

$$u\left(x, \frac{1}{2} R\right) \geqslant \frac{1}{2} e^{-7\alpha/12} u(O) [e^{\alpha[(1/4)-(1/3)|x|R^{-1}]} - 1]. \qquad (12)$$

现在我们作抛物线

$$\bar{P}: x^2 - \frac{3}{8}R(y+R) = 0.$$

容易检验函数

$$z = e^{-(2/9)\alpha R^{-2}[x^2-(3/8)R(y+R)]} - 1$$

在 $\bar{P}$ 上是零，而对充分大的 α 在 K_R 的使 $z \geqslant 0$ 的部分中满足

$$(L+h)[z] > 0.$$

现取 α 大到使 $(L+h)[z_\pm] > 0$ 和 $(L+h)[z] > 0$ 都得到满足. 和以前一样，量 α 只依赖于 μ, R 以及 $L+h$ 的系数的界. 抛物线 $\bar{P}$ 通过 l 的端点而顶点在 $(0, -R)$（见图 21). 现在我们

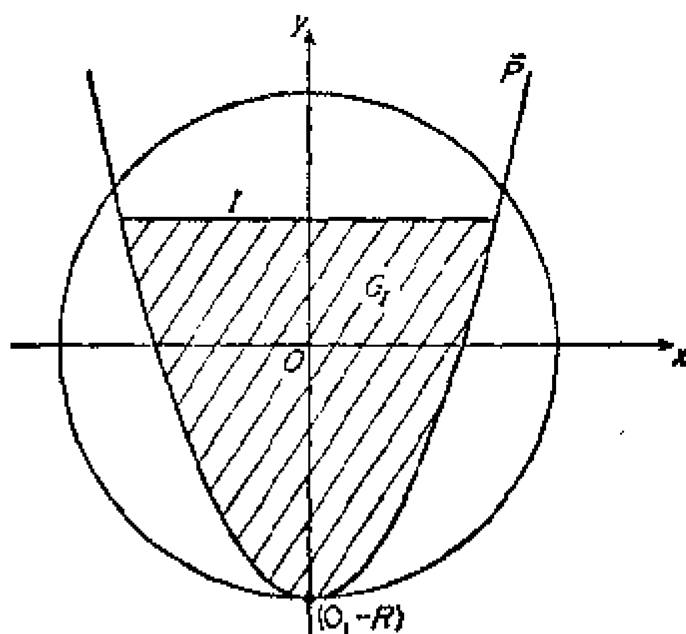


图 21

象对 G_V 所作的那样对由 l 和 $\bar{P}$ 围成的区域 G_l 作同样的论证. 由计算知沿 l

$$z\left(x, \frac{1}{2}R\right) = e^{-(2/9)\alpha R^{-2}[x^2-(9/16)R^2]} - 1$$

$$= e^{(1/8)\alpha-(2/9)\alpha x^2 R^{-2}} - 1$$

$$\leqslant e^{\alpha[(1/4)-(1/3)|x|R^{-1}]} - 1.$$

因此，利用 z 在 $\bar{P}$ 上等于零，u 的非负性以及不等式(12)，可得出对 G_l 边界上的点 P

$$u(P) \geqslant \frac{1}{2} e^{-7\alpha/12} u(O) z(P).$$

在 G_l 的内点上由最大值原理得出同样的不等式. 特别是,对整个位于 G_l 中的圆域

$$K_{R/2}:\ x^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{4} R^2$$

这个不等式正确. 计算表明对 $K_{R/2}$ 中的(x, y)有

$$z \geqslant e^{\alpha/51} - 1.$$

作为最后的结论,我们就得到了

$$u(P) \geqslant \frac{1}{2} e^{-7\alpha/12}(e^{\alpha/51} - 1)u(O) \tag{13}$$

对 $K_{R/2}$ 中的点 P 成立. 这就是所要的 Harnack 不等式,其中

$$A = \frac{1}{2} e^{-7\alpha/12}(e^{\alpha/51} - 1).$$

附注. (i)对满足 $0<\eta<1$ 的任何 η, 设 Γ_η 是连接 O 与边界点, 且使 $u > \eta u(O)$ 在 Γ_η 上成立的曲线. 我们可以用 Γ_η 代替定理证明中所选取的曲线 Γ. 定理证明的其余推理不必改变. 用这样的方法可以从常数 A 中消去因子$\frac{1}{2}$.

(ii) 一旦得到了不等式(13), 我们就可以完全和调和函数的情况一样进行论证, 在区域D的任何有界闭子集 S 上得到 $(L + h)[u] = 0$ 的正解的界.

(iii) 如果函数 h 不是非正, 但是如果R充分小使得存在正函数w在K_R中满足$(L + h)[w] \leqslant 0$,把上面的定理用于函数 u/w, 我们能够对 $K_{R/2}$ 中的点 P 得到 Harnack 不等式 $u(P) \geqslant Au(O)$. 于是,对任何使 $(L + h)[u] = 0$ 的区域D的有界闭子集 S,通过用充分小的圆域来覆盖 S,我们仍然可以得到 Harnack 不等式.

(iv) 假设 Harnack 不等式已建立了区域 D 中 $(L + h)[u] = 0$ 的所有正解在两点 P 和 Q 的值之间的关系 $u(P) \geqslant Ku(Q)$.

如果 D 如此之小使得存在正函数 w 满足 $(L+h)[w]\leqslant -1$，那么，对于非齐次方程

$$(L+h)[v]=f$$

的在 D 的闭包上连续的非负解 v，我们能够得到一个对应的不等式. 设 ϕ 是 $(L+h)[\phi]=0$ 的与 v 有相同(非负)边值的解. 于是由第六节的方法知

$$|\phi - v|\leqslant w\sup_D |f|.$$

把这个估计与应用于 ϕ 的 Harnack 不等式结合起来，我们得到

$$v(P)\geqslant Kv(Q)-[Kw(Q)+w(P)]\sup_D|(L+h)[v]|.$$

这个不等式对 D 中每个二次连续可微的正函数 v 成立. Serrin[6] 证明了象定理23的证明中一样不需要假设函数 ϕ 存在就能够推导出这种形式的一个不等式.

(v) 由计算 $(L+h)[z_\pm]$ 和 $(L+h)[z]$ 可以看出借助算子 L 在原坐标系中的系数和椭圆性常数，(13)中的常数 α 可取为

$$\alpha=\sup_{x^2+y^2<R^2}\{2(288)^2\mu^{-2}(a^2+2b^2+c^2+R^2d^2+R^2e^2)$$
$$-288\mu^{-1}R^2h\}^{1/2}. \qquad (14)$$

我们看到这个量 α 是半径 R 的非减函数.

现在我们利用 Harnack 不等式来得到有关方程 $L[u]=0$ 的解在孤立奇点处的性态的信息. 我们遵循 Gilbarg 和 Serrin[1] 的处理方法.

设 u 是方程

$$L[u]\equiv au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y=0$$

在有孔圆域 $0<x^2+y^2<R_0^2$ 中的解. 假设存在常数 B 使得不等式

$$a^2+2b^2+c^2+(x^2+y^2)(d^2+e^2)\leqslant B \qquad (15)$$

对所有的 x,y 成立. 不难验证圆周 $C_{2R}(O)$: $x^2+y^2=(2R)^2$ 上任何两点 P 和 Q 可由相邻点间距离至多是 $\frac{1}{2}R$ 的圆周上一串至多

13 个点连接起来，如果 $R < \frac{1}{3} R_0$，那么中心在圆周 C_{2R} 上半径为 R 的圆域都位于区域 $0 < x^2 + y^2 < R_0^2$ 当中。重复应用 Harnack 不等式，我们发现 $u(Q) \geqslant A^{13} u(P)$，其中常数 A 只依赖于(14)中的量 α。在中心在圆周 C_{2R} 上半径为 R 的圆域中，我们有 $R^2 \leqslant x^2 + y^2$。因此，按系数的有界性假设(15)，可选 A 与 R 无关。

现在假设当 $x^2 + y^2 \to 0$ 时 $u(x, y)$ 有有限的上极限 M。于是，对任何 $\varepsilon > 0$，存在半径 R_ε，使得当 $x^2 + y^2 < R_\varepsilon^2$ 时有 $M - u + \varepsilon > 0$，并且存在趋于原点的点列 $\{P_\nu\}$ 使得 $u(P_\nu) > M - \varepsilon$。令从原点到 P_ν 的距离是 $2R_\nu$。则 $R_\nu \to 0$，并且我们可以选择一个子序列(仍记为 R_ν)使得 R_ν 单调递减，每个 R_ν 既小于 $\frac{1}{3} R_0$ 又小于 R_ε。注意到 $L[M - u + \varepsilon] = 0$，现在可把上述在圆周 $C_{2R_\nu}(O)$ 上的 Harnack 不等式用于函数 $M - u + \varepsilon$。我们发现在 C_{2R_ν} 上 $M - u + \varepsilon < 2A^{-13}\varepsilon$。于是，由最大值原理，在这些圆周间的环形区域中 $u > M - (1 + 2A^{-13})\varepsilon$。这样一来我们得出：对任何 $\varepsilon > 0$，存在 R_1 使得当 $x^2 + y^2 < (2R_1)^2$ 时

$$|u - M| < (1 + 2A^{-13})\varepsilon.$$

换言之，当 $x^2 + y^2 \to 0$ 时 $u \to M$。

如果 u 的上极限是 $-\infty$，则根据定义 u 有极限 $-\infty$。因此，如果 u 有上界，它就有极限。因为 $L[-u] = 0$，所以如果 u 有下界，我们可得到同样结论。

我们已经建立了下面的定理：

定理 24. 如果 u 是有孔圆域 $0 < x^2 + y^2 < R_0^2$ 中一致椭圆型微分方程

$$L[u] = a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y = 0$$

的解，如果 u 有上界或者有下界，又如果量

$$a^2 + 2b^2 + c^2 + (x^2 + y^2)(d^2 + e^2)$$

有界，则 $\lim\limits_{x^2+y^2\to 0} u(x, y)$ 存在。(它可以是 $\pm\infty$。)

附注. (i) 注意在上面定理中允许系数 d 和 e 无界.

(ii) 利用定理 23 后的附注(iii)和(iv)，并在以上证明中利用形状为 $4(1-\gamma)^2R^2 < x^2+y^2 < 4(1+\gamma)^2R^2$ (其中 γ 充分小) 的环域代替环域 $R^2 < x^2+y^2 < 9R^2$,除(15)外,只要还有

$$\lim_{x^2+y^2\to 0}(x^2+y^2)(|h|+|f|)=0,$$

则对方程

$$(L+h)[u]=f$$

的解可得到同样的结果. 我们只须注意

$$(L+h)[M+\varepsilon-u]=h(M+\varepsilon)+f$$

即可. $u=\cos\theta$ 既满足方程 $\Delta u+r^{-2}u=0$ 又满足 $\Delta u=-r^{-2}\cos\theta$ 这一事实表明关于 f 和 h 的增长条件是必需的.

现在我们来说明怎样用这个结果建立有孔区域中椭圆型方程解的分解定理.

定理 25. 假设 w 是 $L[w]=0$ 在有孔圆域 D: $0<x^2+y^2<R_0^2$ 中的解，并且当 $x^2+y^2\to 0$ 时 $w\to+\infty$. 又假设 L 在 D 中是一致椭圆型的,量

$$a^2+2b^2+c^2+(x^2+y^2)(d^2+e^2)$$
$$+(x^2+y^2)w^{-2}\{(2aw_x+2bw_y)^2+(2bw_x+2cw_y)^2\}$$

有界,那么,$L[u]=0$ 在 D 中使 u/w 有上界或者有下界的任何解 u，必可分解为 w 的倍数与 $L[q]=0$ 的具有以下性质的解 q 之和: q 在圆周 $x^2+y^2=R_0^2$ 上达到它的最大值，并在(0,0)点有极限.

证明. 首先,我们注意在 D 中 u/w 满足一个可以应用定理 24 的形状为 $\tilde{L}[u/w]=0$ 的方程. 如果 u/w 有上界或有下界，于是当 $x^2+y^2\to 0$ 时 $\lim(u/w)$ 存在. 如果 $u/w\to+\infty$ 则当 $x^2+y^2\to 0$ 时 $u\to+\infty$ 而 $w/u\to 0$. 这时可应用 Phragmèn-Lindelöf 原理(定理 19 的推论)从而得出在 D 中 w 有界的结论，与假设矛盾. 类似，极限也不能是 $-\infty$. 因此 $u/w\to c$, c 是有限

数. 我们定义 $q = u - cw$, 可看出 q 是 $(L + h)[q] = 0$ 的一个解, q 满足 $q/w \to 0$, 所以, 按照定理 19 的推论 q 是有界的.

特别, 若可去奇点定理成立, 则 u 等于 cw 加上在整个圆域 $x^2 + y^2 < R_0^2$ 中的一个解.

附注. 根据定理 24 后的附注(ii), 可以把定理 25 的结果推广到 $(L + h)[u] = f$ 的解上去, 其中当 $x^2 + y^2 \to 0$ 时 $(x^2 + y^2) \times (|h| + |f|) \to 0$.

如果 u 是方程 $L[u] = 0$ 在外部区域 $x^2 + y^2 > R_0^2$ 中的解, 则变量替换 $\xi = x/(x^2 + y^2)$, $\eta = y/(x^2 + y^2)$ 可使 u 成为一个同样形式的一致椭圆型方程在区域 $0 < x^2 + y^2 < R_0^{-2}$ 中的解. 把定理 24 用于变换后的问题可得如下结果.

定理 26. 如果 u 是一致椭圆型方程

$$L[u] = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y = 0$$

在外部区域 $x^2 + y^2 > R_0^2$ 中的解, 如果 u 有上界或有下界, 又若量 $a^2 + 2b^2 + c^2 + (x^2 + y^2)(d^2 + e^2)$ 有界, 则 $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} u(x,y)$ 存在(它可以是 $\pm\infty$).

附注 (i) 我们注意关于系数的条件使得当 $x^2 + y^2 \to \infty$ 时 d 和 e 必趋于零. 函数 $u = e^x$ 是

$$u_{xx} + u_{yy} - u_x = 0$$

的解, 它表明了这种限制的必要性.

(ii) 如果当 $x^2 + y^2 \to \infty$ 时 $(x^2 + y^2)(|h| + |f|) \to 0$, 那么这个结果又可推广到 $(L + h)[u] = f$ 的解上去.

如果 u 在整个 x, y 平面上满足 $L[u] = 0$, 从最大值原理可见 u 不能大于或小于它在无穷远处的极限. 因此, 我们得到 Liouville 定理:

定理 27 (Liouville). 如果 u 是一致椭圆型方程

$$L[u] = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y = 0$$

在整个 x,y 平面上的解，u 有上界或有下界，又若量

$$a^2 + 2b^2 + c^2 + (x^2 + y^2)(d^2 + e^2)$$

有界，则 u 是常数.

Serrin [6,7] 还对 $n > 2$ 时的 n 维椭圆型方程的解建立了 Harnack 不等式. 但是与二维情形不同，必须假设系数的某种光滑性条件或者假设解的梯度有界.

利用后面的结果，只要系数在孤立奇点处有极限，Gilbarg 和 Serrin [1] 建立了与定理 24,25 和 26 类似的 n 维情形的结果.

Moser [1] 曾对散度形的一致椭圆型方程

$$(L + h)[u] = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + hu = 0, \ \ h \leqslant 0$$

在关于系数的不多的限制下得到了 Harnack 不等式. 这样的结果在非线性方程的研究中是有用的.

习　　题

1. 验证第 126 页的 Poisson 公式(2)给出平面中 Laplace 方程的解. 验证第 126 页的公式(4)给出 n 维($n>2$)Laplace 方程的解.

2. 定义 $u_k(x,y) = a_k r^k \cos k\theta, k = 1,2,\cdots$，其中 $\{a_k\}$ 组成一个有界序列. 证明在包含于 D: $x^2 + y^2 < 1$ 中的任何闭集上 $\{u_k\}$ 一致收敛. 关于 $\{a_k\}$ 有界性的假设能够减弱到什么程度? 极限函数是不是调和函数?

3. 验证第 139 页的公式(14).

4. 假设算子 $L + h$ 中的量

$$a^2 + 2b^2 + c^2 + (x^2 + y^2)(d^2 + e^2 - h)$$

有界. 设 u 在中心是距原点 $2R$ 的点 P 半径为 R 的圆域中是 $(L + h)[u] = 0$ 的一个非负解. 假设 $h \leqslant 0$. 证明存在与 R 无关的常数 A，使得对任何与 P 的距离小于 $\frac{1}{2}R$ 的点 Q 有 $u(Q) > Au(P)$.

5. 利用第 4 题的结果证明: 如果当 $0 < x^2 + y^2 < R_0^2$ 时 $(L + h)[u] = 0$，则量

$$u(x,y)(x^2 + y^2)^{\log(1/A)/2\log(5/4)}$$

有界.

6.证明：如果在圆域 $x^2+y^2<R^2$ 中 $|\Delta u|\leqslant M$ 且 $u\geqslant 0$，则

$$\frac{R-r}{R+r}\left\{u(0,0)-\frac{1}{4}M[R^2+(R+r)^2]\right\}\leqslant u(x,y)$$

$$\leqslant\frac{R+r}{R-r}\left\{u(0,0)+\frac{1}{4}M[R^2+(R-r)^2]\right\}.$$

第十一节 容 量

设 D 是一个三维区域，其边界 ∂D 由两个光滑的简单闭曲面 Γ_1 和 Γ_2 组成，其中 Γ_1 整个地位于 Γ_2 内(图 22)．可以证明在 D 中存在函数 $u(x,y,z)$ 具有性质：

$$\Delta u=0 \quad \text{在} D \text{中},$$
$$u=1 \quad \text{在} \Gamma_1 \text{上},$$
$$u=0 \quad \text{在} \Gamma_2 \text{上}.$$

第四节定理 9 建立了这种函数的唯一性．在物理上可对量 u 作如下解释：若采用适当的单位，当完全导体 Γ_1 和 Γ_2 之间正好保持一个单位的电势差时，D 中任一点 $P(x,y,z)$ 的静电势就是 u。

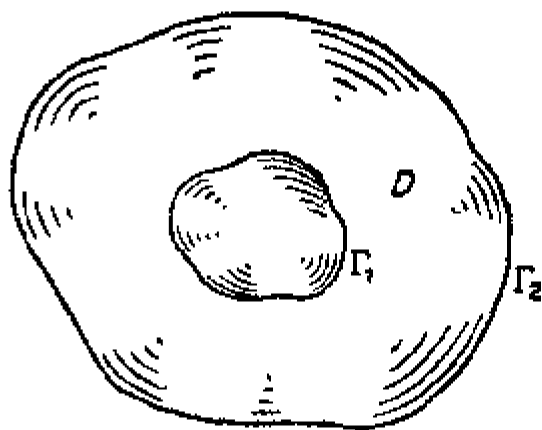


图 22

这个电势差所感应的总电荷 $C=C(\Gamma_1,\Gamma_2)$ 由公式

$$C(\Gamma_1,\Gamma_2)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial n}dS$$

给出. 量 C 称为 Γ_1 关于 Γ_2 的静电容量或简单地称为容量.

第七节的定理 15 表明,如果 u 是在边界上具有连续法向导数的 D 中任何调和函数,则关系式

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} dS = 0$$

成立. 对所考虑的环形区域,这个恒等式表明

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} dS = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} dS.$$

因为函数 $u_1 = 1 - u$ 在 D 中调和,在 Γ_2 上等于 1 而在 Γ_1 上等于 0,我们看出关系式

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_1}{\partial \boldsymbol{n}} dS = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

蕴涵着 Γ_1 关于 Γ_2 的容量和 Γ_2 关于 Γ_1 的容量是相同的;即

$$C(\Gamma_1, \Gamma_2) = C(\Gamma_2, \Gamma_1).$$

此外,若 Γ' 是位于 Γ_1 和 Γ_2 之间并把它们分开的任何简单闭曲面,我们发现 $\int_{\Gamma'} (\partial u/\partial \boldsymbol{n}) dS = \int_{\Gamma_1} (\partial u/\partial \boldsymbol{n}) dS$,所以可以沿任意闭曲面 Γ' 求 u 的法向导数的积分来计算容量.

现在将要表明怎样利用最大值原理来得到大小不同的导体容量之间的比较. 考虑用导体 $\bar{\Gamma}_1$ 代替导体 Γ_1 产生的影响,其中 $\bar{\Gamma}_1$ 在下述意义下比 Γ_1 大: 即 $\bar{\Gamma}_1$ 位于区域 D 中并把 Γ_1 和 Γ_2 分开 (见图 23). 用 $\bar{D}$ 表示由 $\bar{\Gamma}_1$ 和 Γ_2 包围的区域. 函数 $\bar{u}$ 是在 $\bar{\Gamma}_1$ 和 Γ_2 之间保持单位电势差时得到的静电势,即 $\bar{u}$ 是问题

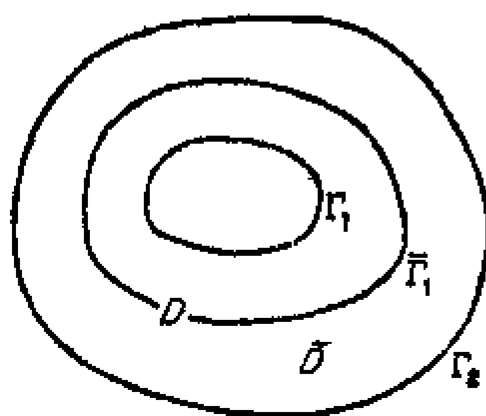


图 23

$$\Delta\bar{u} = 0 \quad 在 \bar{D} 中,$$
$$\bar{u} = 1 \quad 在 \bar{\Gamma}_1 上,$$
$$\bar{u} = 0 \quad 在 \Gamma_2 上$$

的解．把 $\bar{C}=C(\Gamma_1,\Gamma_2)$ 称为 Γ_1 关于 Γ_2 的容量，我们有

$$\bar{C}=-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_2}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \boldsymbol{n}}dS.$$

由最大值原理，在 D 中函数 u 的值在 0 和 1 之间．（在 $\bar{D}$ 中）定义了函数 $v=u-\bar{u}$，我们看到

$$\Delta v=0 \quad 在 \bar{D} 中,$$
$$v\leqslant 0 \quad 在 \Gamma_1 上,$$
$$v=0 \quad 在 \Gamma_2 上.$$

v 的最大值是零，并在 Γ_2 上每一点达到．由定理 7 知

$$\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}>0 \quad 在 \Gamma_2 上.$$

由此推出

$$C-\bar{C}=-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_2}\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-\frac{\partial \bar{u}}{\partial \boldsymbol{n}}\right)dS$$
$$=-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_2}\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}dS<0.$$

因此我们有不等式

$$C<\bar{C}.$$

换言之，对固定的 Γ_2，当 Γ_1 向外移动时静电容量增加．类似可证，对固定的 Γ_1，当 Γ_2 向内移动时容量增加．

可以利用容量的上述性质来得到任何一对导体的容量的界．设 K_1 和 K_2 分别是半径为 R_1 和 $R_2(R_2>R_1)$ 的同心球面．这一对导体的容量可显式求出．取球面的公共中心为坐标原点并设 $r^2=x^2+y^2+z^2$，容易验证

$$u(x,y,z)=\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)$$

在 K_1 和 K_2 之间的区域中调和，而且当 $r=R_2$ 时 $u=0$，当 $r=R_1$ 时 $u=1$．因此 u 是所要的静电势函数．因为在 K_2 上 $\partial/\partial \boldsymbol{n}=\partial/\partial r$，我们有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=R_2}=-\frac{R_1}{R_2(R_2-R_1)},$$

从而两个同心球面的容量 $C(K_1,K_2)$ 是

$$C(K_1,K_2)=\frac{1}{4\pi}\frac{R_1}{R_2(R_2-R_1)}\int_{K_2}dS=\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}.$$

若 K_1 在固定曲面 Γ_1 之内，而 K_2 包围了包含 Γ_1 的曲面 Γ_2（见图24），则容量 $C(\Gamma_1,\Gamma_2)$ 满足不等式

$$C(\Gamma_1,\Gamma_2)>C(K_1,K_2)=\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}.$$

类似地，一旦可以找到位于 Γ_1 和 Γ_2 之间区域中并把 Γ_1 和 Γ_2 分开的同心球面，这个方法就给出 $C(\Gamma_1,\Gamma_2)$ 的一个上界。

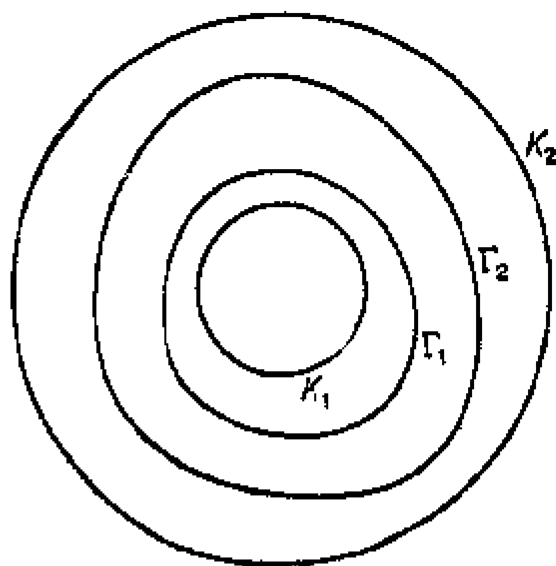


图 24

我们已经证明随 Γ_2 大小的增加，曲面 Γ_1 关于 Γ_2 的容量减小。假设我们选半径 R 的球面 K_R 作为 Γ_2，于是当 R 趋于无穷时，Γ_1 关于 K_R 的容量逐渐减小．因为容量总是非负的，当 $R\to\infty$ 时它必然趋于一个极限．现在我们能够定义单个导体 Γ_1 的容量了．

定义．导体 Γ_1 的容量是当 $R\to\infty$ 时 Γ_1 关于球面 K_R 的容量的极限．我们用 $C(\Gamma_1)$ 表示这个量．

设函数 u 满足

$$\Delta u = 0 \quad 在\ \Gamma_1\ 的外部$$

和附加条件

$$u = 1 \quad 在\ \Gamma_1\ 上,$$
$$\lim_{r\to\infty} u(x,y,z) = 0.$$

由最后一个条件，我们看到对任何 $\varepsilon > 0$ 存在 R 使得在球面 K_R 上 $0 < u < \varepsilon$. 由推导容量的单调性时所用的论证法，我们可得结论

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} dS \leqslant C(\Gamma_1, K_R).$$

另一方面，如果把同样的论证用于函数 $(u-\varepsilon)/(1-\varepsilon)$ (它在 K_R 上非正，在 Γ_1 上等于 1)，我们发现

$$\frac{1}{1-\varepsilon}\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} dS \geqslant C(\Gamma_1, K_R).$$

因此

$$(1-\varepsilon)C(\Gamma_1, K_R) \leqslant \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} dS \leqslant C(\Gamma_1, K_R).$$

令 $R \to \infty$ 和 $\varepsilon \to 0$，我们得到

$$C(\Gamma_1) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} dS.$$

由第七节定理 15，我们又能写成

$$C(\Gamma_1) = -\frac{1}{4\pi}\int_{K_R} \frac{\partial u}{\partial r} dS,$$

其中 K_R 是任何包含 Γ_1 的球面.

如果 Γ_1 是半径为 R_1 的球面 K_1，我们求得

$$C(K_1) = \lim_{R\to\infty} C(K_1, K_R) = \lim_{R\to\infty} \frac{RR_1}{R-R_1} = R_1.$$

球面的容量由它的半径给出.

用极限论证的方法可以证明当导体增大时导体的容量增加.

现在要用最大值原理来得到互不包含的两个导体间的比较。假设 Γ_1' 和 Γ_1'' 是包含在闭曲面 Γ_2 内部的两个简单闭曲面． 曲面 Γ_1' 和 Γ_1'' 可以相交也可以不相交(图 25)．用 Γ_1 表示曲面 Γ_1' 和 Γ_1'' 的并集，并定义三个势函数：

(i) 函数 u' 有性质：

$$\Delta u' = 0 \quad 在 \Gamma_1' 和 \Gamma_2 之间,$$
$$u' = 1 \quad 在 \Gamma_1' 上,$$
$$u' = 0 \quad 在 \Gamma_2 上.$$

(ii) 函数 u'' 有性质：

$$\Delta u'' = 0 \quad 在 \Gamma_1'' 和 \Gamma_2 之间,$$
$$u'' = 1 \quad 在 \Gamma_1'' 上, \quad u'' = 0 \quad 在 \Gamma_2 上.$$

(iii) 函数 u 有性质：

$$\Delta u = 0 \quad 在 \Gamma_1 和 \Gamma_2 之间,$$
$$u = 1 \quad 在 \Gamma_1 上, \quad u = 0 \quad 在 \Gamma_2 上.$$

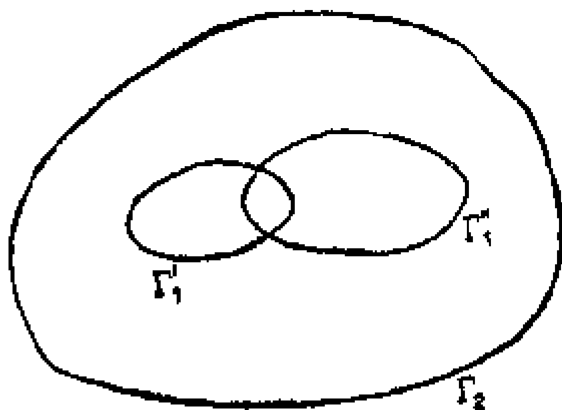


图 25

现在 Γ_1 和 Γ_2 之间的区域上定义

$$v = u' + u'' - u,$$

注意 $\Delta v = 0$ 并且

$$v > 0 \quad 在 \Gamma_1 上,$$
$$v = 0 \quad 在 \Gamma_2 上.$$

因为在 Γ_2 上每一点达到 v 的最小值，最大值原理给出

$$\frac{\partial v}{\partial n} < 0 \quad 在 \Gamma_2 上.$$

所以，用明显的记号表示就有

$$C' + C'' - C = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_2}\left(\frac{\partial u'}{\partial \boldsymbol{n}} + \frac{\partial u''}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)dS$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_2}\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}dS > 0,$$

或

$$C < C' + C''. \qquad (1)$$

换句话说，关于一个给定曲面 Γ_2 的容量是 Γ_1 的一个次可加函数. 特别当 Γ_2 是半径为 R 的球面 K_R 时，不等式成立. 令 $R \to \infty$ 可得结论：若 $C(\Gamma')$，$C(\Gamma'')$ 和 $C(\Gamma)$ 是单个导体的容量，其中 $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$，则

$$C(\Gamma) \leqslant C(\Gamma') + C(\Gamma''). \qquad (2)$$

如果利用 u' 和 u'' 在 Γ_1 上有正下界的事实，则可改进不等式(1)和(2). 设 m' 和 m'' 是正常数使得

$$u' \geqslant m' \quad 在\ \Gamma_1'\ 上,$$
$$u'' \geqslant m'' \quad 在\ \Gamma_1''\ 上.$$

引进调和函数

$$v = u - \frac{(1 - m'')u' + (1 - m')u''}{1 - m'm''},$$

注意在 Γ_2 上 $v = 0$，在 Γ_1 上 $v \leqslant 0$. 于是，由最大值原理知在 Γ_2 上 $(\partial v/\partial \boldsymbol{n}) > 0$. 利用和前面同样的论证，我们发现

$$C < \frac{(1 - m'')C' + (1 - m')C''}{1 - m'm''}.$$

这个不等式可写成形式

$$C < C' + C'' - \frac{m''(1 - m')C' + m'(1 - m'')C''}{1 - m'm''}. \qquad (3)$$

界(3)是(1)的改进.

要使(3)成为可用的，本质之点是要在实际上不知道势函数 u' 和 u'' 的情况下能够估计 m' 和 m''. 我们要表明借助导体的几何特点怎样能够做到这一点.

在位于 Γ_1' 和 Γ_2 之间区域中的一点 (ξ,η,ζ) 处，对位势函数 u' 应用第七节等式(12)给出的 Green 第二恒等式，我们求得

$$u'(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_2}\frac{1}{r}\frac{\partial u'}{\partial n}dS-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_1'}\frac{1}{r}\frac{\partial u'}{\partial n}dS, \tag{4}$$

其中 r 表示 (ξ,η,ζ) 到边界的距离（注意由 Green 第一恒等式 $\int_{\Gamma_1'}(\partial/\partial n)(1/r)dS=0$）. 导数 $\partial/\partial n$ 是从每个曲面的内部到外部的方向上取的. 我们注意在 Γ_1' 和 Γ_2 上都有 $\partial u'/\partial n<0$ 并且

$$C'=-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_1'}\frac{\partial u'}{\partial n}dS=-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_2}\frac{\partial u'}{\partial n}dS. \tag{5}$$

分别把 d_1' 和 δ_1' 定义为从 (ξ,η,ζ) 到 Γ_1' 上任何点的最大距离和最小距离. 类似地，把 d_2 和 δ_2 定义为到 Γ_2 的最大和最小距离. 于是，把这些最大值和最小值依次代入(4)，并利用(5)，就得到

$$C'\left(\frac{1}{d_1'}-\frac{1}{\delta_2}\right)\leqslant u'(\xi,\eta,\zeta)\leqslant C'\left(\frac{1}{\delta_1'}-\frac{1}{d_2}\right), \tag{6}$$

类似的估计对 u'' 成立. 这样可得(3)中用到的 m' 和 m'' 的值.

在单个导体的容量的情形，Γ_2 在无穷远，从而 $1/\delta_2=1/d_2=0$，用 d 表示 Γ_1' 的任何点和 Γ_2' 的任何点间距离的最大值，从(6)可得在 Γ_2' 上成立的不等式 $u'\geqslant C'/d$. 因此，在(3)中可取 $m'=C'/d$. 类似可选取 $m''=C''/d$. 于是(3)变成只依赖于导体几何特征的一个估计

$$C<C'+C''-\frac{C'C''(2d-C'-C'')}{d^2-C'C''}.$$

习　　题

1. 求棱长为 1 的立方体的容量的上下界.

2. 求棱长为 1 的正四面体容量的上下界.

3. 设四面体的顶点在(0,0,0)，(1,0,0)，(0,1,0)和(0,0,1). 设立方体的棱长为 10，中心在原点，棱与坐标轴平行. 求四面体关于立方体的容量的上下界.

4. 求中心在$(0,0,0)$，$(-2,0,0)$，$(2,0,0)$，半径为 1 的三个球面构成的曲面的容量的上下界.

5. 已知半径为 a 的圆域容量是 $(2/\pi)a$. 求由两个半径为 a 的平行圆域组成的集合的容量. 设其连心线长为 $2a$，垂直于圆域所在的平面.

第十二节　Hadamard 三圆周定理

考虑由两个半径为 R_1 和 $R_2(R_2 > R_1)$ 的同心圆周组成的环状平面区域. 设 u 是定义在 D 中的下调和函数；即

$$\Delta u \geqslant 0 \quad \text{在} D \text{中}.$$

令 $r^2 = x^2 + y^2$ 并取圆周的公共中心作坐标原点（见图 26），我们定义

$$M(r) = \max_{x^2+y^2=r^2} u(x,y).$$

换句话说，函数 $M(r)$ 是 u 在半径为 r 的同心圆周上的最大值.

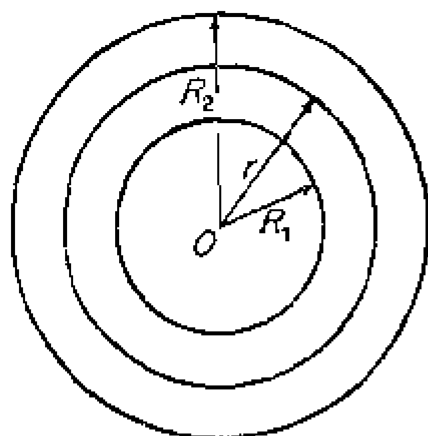


图　26

我们看到带有常数 a 和 b 的形状为

$$\varphi(r) = a + b \log r \qquad (1)$$

的任何函数当 $r \neq 0$ 时是调和的. 如果 r_1 和 r_2 是 R_1 和 R_2 之间的任何两个数，我们可选取 a 和 b 使得

$$\varphi(r_1) = M(r_1),$$
$$\varphi(r_2) = M(r_2).$$

简单的计算表明

$$\varphi(r) = \frac{M(r_1)\log(r_2/r) + M(r_2)\log(r/r_1)}{\log(r_2/r_1)}. \qquad (2)$$

定义 $v(x,y) = u(x,y) - \varphi(\sqrt{x^2+y^2})$，我们有

$$\Delta v \geqslant 0,$$

$$v \leqslant 0 \quad \text{在} r = r_1 \text{上和在} r = r_2 \text{上}.$$

因此，由最大值原理知

$$v \leqslant 0 \quad \text{当} r_1 < r < r_2 \text{时},$$

当且仅当 $u \equiv \varphi(r)$ 时上式中等号成立.这样一来当 $x^2 + y^2 = r^2$ 时我们求得

$$u \leqslant \varphi(r), \quad r_1 < r < r_2,$$

所以

$$M(r) \leqslant \varphi(r), \quad r_1 < r < r_2.$$

这个论证建立了以下结果.

定理 28 （Hadamard 三圆周定理）. 设 $u(x, y)$ 在区域 D 中下调和，而 D 包含半径为 r_1 和 r_2 的同心圆周及它们之间的区域. 如果 $M(r)$ 表示在半径为 r 的任一圆周上 u 的最大值,则当 $r_1 < r < r_2$ 时

$$M(r) \leqslant \frac{M(r_1)\log(r_2/r) + M(r_2)\log(r/r_1)}{\log(r_2/r_1)}. \tag{3}$$

当且仅当 $u \equiv \varphi$ 时出现等号,其中 φ 由(2)给出.

如果对任何两个数 x_1 和 x_2,我们有

$$f(x) \leqslant f(x_1)\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad 当\ x_1 \leqslant x \leqslant x_2\ 时,$$

则称函数 $f(x)$ 是 x 的凸函数,即 f 的图象位于联接点 $(x_1, f(x_1))$ 和 $(x_2, f(x_2))$ 的直线之下. Hadamard 三圆周定理说明 $M(r)$ 是 $\log r$ 的凸函数.

假设 u 在原点可能除外的整个 x, y 平面中下调和，并以常数 M 为上界. 若在不等式(3)中我们令 $r_2 \to \infty$,就得到

$$M(r) \leqslant M(r_1) \lim_{r_2 \to \infty} \frac{\log(r_2/r)}{\log(r_2/r_1)} + \lim_{r_2 \to \infty}\left(M(r_2)\frac{\log(r/r_1)}{\log(r_2/r_1)}\right).$$

因为 $M(r_2) \leqslant M$，右端的第二个极限是零,简单地应用 L' Hôpital 法则表明第一个极限是 1. 这样一来我们求得

$$M(r) \leqslant M(r_1) \quad 当\ r \geqslant r_1\ 时.$$

类似地,在不等式(3)中令 $r_1 \to 0$ 又给出结果

$$M(r) \leqslant M(r_2) \quad 当\ r \leqslant r_2\ 时.$$

因为 r_1 和 r_2 是任意的,我们得到 $M(r)$ 是常数的结论. 所以，由强最大值原理 u 必是常数. 我们已经证明了下面的定理.

定理 29 (Liouville 定理). 如果 u 在原点可能除外的整个 x,y 平面上下调和,又若 u 一致有上界,则 u 是一个常数.

附注. (i) 从证明的方法显然可见 u 的有界性假设可以减弱. 对 r_1 和 r_2 值的序列取极限,可证: 如当 $r\to 0$ 以及当 $r\to\infty$ 时

$$\liminf \frac{M(r)}{|\log r|}\leqslant 0,$$

则 u 是常数.

(ii) 前一附注表明, 对于除原点外在整个平面上定义的非常数下调和函数,无论当 r 趋于零或者 r 趋于无穷时, $M(r)$ 必定至少和 $|\log r|$ 同样迅速地趋向无穷.

以下两个下调和函数

$$u=\begin{cases}-\left(\dfrac{3}{4}-r^2+\dfrac{1}{4}r^4\right) & \text{当 } r\leqslant 1 \text{ 时},\\ \log r & \text{当 } r\geqslant 1 \text{ 时}\end{cases}$$

和

$$u=\begin{cases}\log(1/r)-\left(\dfrac{3}{4}-r^2+\dfrac{1}{4}r^4\right) & \text{当 } r\leqslant 1 \text{ 时},\\ 0 & \text{当 } r\geqslant 1 \text{ 时},\end{cases}$$

一个在无穷远处,另一个在原点处是对数增长的. 所以,我们已经得到了关于下调和函数增长性的最好可能的结果.

(iii) 对于有下界的上调和函数,与 Liouville 定理类似的定理显然成立. 特别是,在一个点可能除外的整个 x,y 平面上的调和函数,它或者有上界或者有下界,则必是常数.

三圆周定理依赖于基本解 $\log r$ 的特殊行为. 在把这个定理推广到 n 个变量($n\geqslant 3$)的函数时,就要利用基本解 $r^{-(n-2)}$. 设 D 是两个半径为 R_1 和 $R_2(R_2>R_1)$ 的 n 维球面之间的区域. 假设在 D 中 u 满足

$$\Delta u\geqslant 0.$$

我们定义

$$M(r)=\max_{\sum_{i=1}^{n}x_i^2=r^2} u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

并注意到

$$\varphi(r)\equiv a+br^{-(n-2)}$$

当 $r\neq 0$ 时是调和函数．令

$$\varphi(r_1)=M(r_1),$$
$$\varphi(r_2)=M(r_2),$$

其中 $R_1<r_1<r_2<R_2$，通过类似于在三圆周定理中用过的论证方法我们得到三球面定理．

定理 30(三球面定理)． 假设在一个包含两个半径为 r_1 和 r_2 的球面以及其间的区域的区域 D 中 $\Delta u\geqslant 0$．如果 $r_1<r<r_2$，则

$$M(r)\leqslant\frac{M(r_1)(r^{2-n}-r_2^{2-n})+M(r_2)(r_1^{2-n}-r^{2-n})}{r_1^{2-n}-r_2^{2-n}}.$$

当且仅当 $u=a+br^{-(n-2)}$ 时等号成立．

附注． (i)这个定理中的不等式说明 $M(r)$ 是 r^{2-n} 的凸函数．

(ii) 令 $r_1\to 0$，我们看到如果

$$\liminf_{r_1\to 0} r_1^{n-2}M(r_1)\leqslant 0,$$

则 $M(r)$ 是 r 的非减函数．由此推出在原点附近 u 有上界．换句话说，如果一个下调和函数在原点无上界，则它必定在某个趋于原点的点列上和 r^{2-n} 同样迅速地趋于 $+\infty$．

(iii) 令 $r_2\to\infty$，我们看到如果

$$\liminf_{r_2\to\infty} M(r_2)\leqslant 0,$$

则 $r^{n-2}M(r)$ 是 r 的非增函数．因此如果 $\limsup_{r\to 0} u\leqslant 0$，则 $r^{n-2}u$ 有上界．

(iv) 定理 30 并不导致 Liouville 定理．事实上，三个或更多变量的有上界的全空间中下调和函数并非必为常数．例如，函数

$$u(r)=\begin{cases}-\frac{1}{8}(15-10r^2+3r^4), & 当 r\leqslant 1 时,\\ -1/r, & 当 r\geqslant 1 时\end{cases}$$

是整个三维 Euclid 空间中的下调和函数，并且处处有界．在二维的 Euclid 空间中来考虑同一个函数，它满足不等式 $\Delta u+\min(1,r^{-2})(xu_x+yu_y)\geqslant 0$，这表明在定理 27 中给出的 Liouville 定理不能推广到满足椭圆型微分不等式而不满足微分方程的函数上去．

三圆周(或三球面)定理可以推广到形状为

$$L[u]\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\geqslant 0 \tag{4}$$

的更一般的椭圆型微分不等式上去．

我们首先注意到定理 28 和 30 的证明并不要求辅助函数 $\varphi(r)$ 是调和函数．为了在这些证明中利用最大值原理只有 $\varphi(r)$ 上调和才是必要的；即 φ 必须满足不等式 $\Delta\varphi\leqslant 0$．

如果 u 是 $L[u]\geqslant 0$ 的任何非常数解，而 $M(r)$ 定义如前，从最大值原理可推出在任何区间上 $M(r)$ 都不能是常数，事实上，在任何区间上 $M(r)$ 不能有一个内部最大值．而且，它不能有局部最大值，所以至多只能有一个最小值．因此，$M(r)$ 可以先减后增，或者一直增加，或者一直减少．

假设我们能够找到一个辅助函数 $\phi(r)$ 使得 $L[\phi]\leqslant 0$．而且，假设对于 $R_1<r<R_2$，$M(r)$ 和 $\phi(r)$ 都增加或者都减少．对 $R_1<r_1\leqslant r\leqslant r_2<R_2$，定义函数

$$\varphi(r)=\frac{\phi(r_2)M(r_1)-\phi(r_1)M(r_2)}{\phi(r_2)-\phi(r_1)}+\frac{M(r_2)-M(r_1)}{\phi(r_2)-\phi(r_1)}\phi(r), \tag{5}$$

并注意到

$$\varphi(r_1) = M(r_1), \quad \varphi(r_2) = M(r_2).$$

从而我们得到

$$u - \varphi \leqslant 0 \quad 当\ r = r_1,\ r = r_2\ 时$$

并且

$$L[u - \varphi] \geqslant 0 \quad 在 D 中.$$

最后那个不等式依赖于(5)中 $\phi(r)$的系数非负的事实；也就是说，它依赖于假设：M和ϕ或者同为r的增函数或者同为r的减函数.

把最大值原理用于函数 $u - \varphi$，给出当 $r_1 < r < r_2$ 时 $u \leqslant \varphi$；因此

$$M(r) \leqslant \varphi(r), \quad r_1 < r < r_2,$$

当且仅当 $u \equiv \varphi$ 时等号成立. 也可以把这说成 $M(r)$ 是 $\phi(r)$的**凸函数**. 能不能应用这样的结果取决于能否找到满足 $L[\phi] \leqslant 0$ 的增函数 $\phi(r)$. 类似地，我们必须能找到满足同样不等式的一个减函数.

现在我们展示一种寻求这种函数的方法. 设函数 $c_1(r)$ 和 $c_2(r)$ 使得当 $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ 时

$$c_1(r) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ii} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{x_i}{r} \frac{x_j}{r} + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i}{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{x_i}{r} \frac{x_j}{r}} \leqslant c_2(r).$$

当 L 是一致椭圆型的，而 $a_{ij}, b_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 在D中一致有界时，总能找到这种函数.

定义增函数

$$\phi_+(r) = \int_a^r e^{-\int_b^s [c_2(\rho)/\rho] d\rho} ds$$

和减函数

$$\phi_-(r) = \int_r^a e^{-\int_b^s [c_1(\rho)/\rho] d\rho} ds,$$

其中 a 和 b 是待定常数. 容易证明 ϕ_+ 和 ϕ_- 都满足 $L[\phi] \leqslant 0$.

事实上，计算表明

$$L[\phi(r)] = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{x_i}{r}\frac{x_j}{r}\right)\phi_{rr} + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{x_i}{r}\frac{x_j}{r} + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right)\frac{\phi_r}{r}.$$

由 $c_2(r)$ 的定义，$\phi_{+rr} = -(c_2(r)/r)\phi_{+r}$ 以及 $\phi_{+r} > 0$ 给出了不等式 $L[\phi_+] \leqslant 0$。类似可得 $L[\phi_-] \leqslant 0$。

如果 L 是 Laplace 算子，我们可选取 $c_1(r) \equiv c_2(r) = n-1$，并且两个函数 $\phi_\pm$ 在二维情形化为 1 和 $\log r$ 的线性组合，在 n 维情形($n \geqslant 3$)化为 1 和 $r^{-(n-2)}$ 的线性组合.

考虑其全用单参数曲面族代替一族同心球面也可进一步推广 Hadamard 的结果. 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个二次连续可微函数，在区域 D 中其梯度恒不为零. 我们假设当 $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$ 时单参数方程族

$$S_\rho: \quad f(\boldsymbol{x}) = \rho$$

表示位于 D 中的一族 $(n-1)$ 维光滑闭曲面. 此外，我们假设对应于较大的 ρ 值的曲面把较小 ρ 值的曲面包围在自己的内部. 例如，若

$$f(\boldsymbol{x}) = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2},$$

则 S_ρ 就是半径为 ρ 的球面.

设 $u(\boldsymbol{x})$ 满足不等式

$$L[u] \geqslant 0,$$

其中 L 是由(4)给出的算子. 我们定义

$$M(\rho) = \max_{f(\boldsymbol{x})=\rho} u(\boldsymbol{x}).$$

和前面一样，我们发现 $M(\rho)$ 不能有局部最大值并且至多有一个最小值. 现在来求辅助函数 $\phi_+(\rho)$ 和 $\phi_-(\rho)$，二者都满足 $L[\phi] \leqslant 0$，并且 ϕ_+ 是 ρ 的增函数而 ϕ_- 是 ρ 的减函数. 于是，在 $M(\rho)$ 增加的区间上它是 ϕ_+ 的凸函数；在 $M(\rho)$ 减少的区间上它是 ϕ_- 的凸函数.

计算表明

$$L[\phi]=\phi''(\rho)\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}+\phi'(\rho)L[f].$$

现在定义函数 $d_1(\rho)$ 和 $d_2(\rho)$ 使得当 $f(\boldsymbol{x})=\rho$ 时

$$d_1(\rho)\leqslant\frac{L[f]}{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}}\leqslant d_2(\rho).$$

算子 L 的一致椭圆性保证我们总能找到 d_1 和 d_2. 于是,带有任意常数 a 和 b 的增函数

$$\phi_+(\rho)=\int_a^\rho e^{-\int_b^s d_2(\sigma)d\sigma}ds$$

和减函数

$$\phi_-(\rho)=\int_\rho^a e^{-\int_b^s d_1(\sigma)d\sigma}ds$$

满足要求的条件. 在 $f(\boldsymbol{x})=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$ 的情形,容易看出 $d_1(\rho)=c_1(\rho)/\rho, d_2(\rho)=c_2(\rho)/\rho$, 我们重新得到三球面定理.

例. 设 $L=\Delta$ 是平面上的 Laplace 算子,选取 f 为函数

$$f(x,y)=(\alpha x^2+\beta y^2)^{1/2},\quad \alpha>\beta>0.$$

于是曲线 S_ρ 形成了图 27 所示的椭圆族. 简单的计算给出

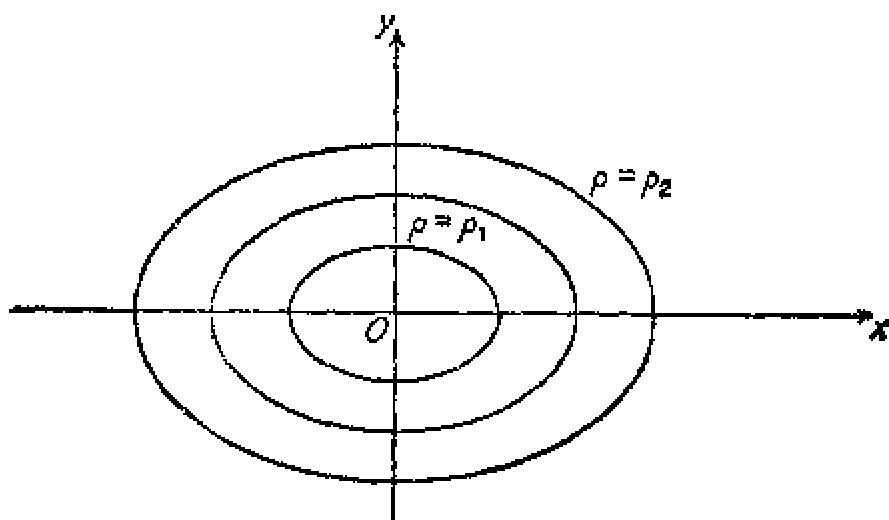


图 27

$$\frac{\Delta f}{|\mathrm{grad} f|^2}=\frac{\alpha\beta(x^2+y^2)}{[\alpha^2x^2+\beta^2y^2][\alpha x^2+\beta y^2]^{1/2}}.$$

因此可取

$$d_1(\rho)=\frac{\beta}{\alpha\rho},\ d_2(\rho)=\frac{\alpha}{\beta\rho}.$$

求出 ψ_+和 ψ_-表达式中的积分，得到

$$\psi_-(\rho)=-\rho^{1-(\beta/\alpha)},\quad \psi_+(\rho)=-\rho^{-[(\alpha/\beta)-1]}.$$

这样一来，如果 $M(\rho)$ 是增函数，它就是 $-\rho^{-[(\alpha/\beta)-1]}$ 的凸函数，即 $M(\rho)$ 满足不等式

$$M(\rho)\leqslant\frac{M(\rho_1)[\rho^{(\beta-\alpha)/\beta}-\rho_2^{(\beta-\alpha)/\beta}]+M(\rho_2)[\rho_1^{(\beta-\alpha)/\beta}-\rho^{(\beta-\alpha)/\beta}]}{\rho_1^{(\beta-\alpha)/\beta}-\rho_2^{(\beta-\alpha)/\beta}},$$

$$\rho_1<\rho<\rho_2.$$

推广的三曲面定理允许我们得到定义在一个不是全空间的无界集上的函数的凸性定理．用一个平面情形的例子来说明这种情况．

例． 设 $L=\Delta$ 并选 f 为函数

$$f(x,y)=\frac{1+x^2+y^2}{2y},\ y>0.$$

在上半平面中 f 为正，当 ρ 为常数时曲线 $f(x,y)=\rho$ 是图 28

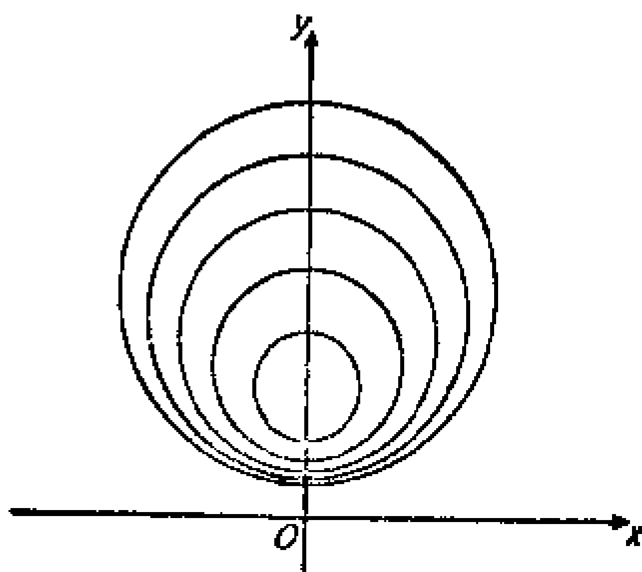


图　28

中所示的圆周．对应于较大的 ρ 值的圆周包围 ρ 值较小的圆周．当 $1 \leqslant \rho < \infty$ 时单参数族 $f = \rho$ 充满了上半平面 $y > 0$．取 ϕ 是函数

$$\phi(\rho) = \log \frac{\rho + 1}{\rho - 1}, \quad \rho > 1,$$

计算表明 $\Delta\phi = 0$．因为 ϕ 调和，于是无论 $M(\rho)$ 是增还是减函数，它都是 ϕ 的凸函数，并且对上半平面中的任何下调和函数我们有

$$M(\rho) \leqslant \frac{M(\rho_2)[\phi(\rho) - \phi(\rho_1)] + M(\rho_1)[\phi(\rho_2) - \phi(\rho)]}{\phi(\rho_2) - \phi(\rho_1)},$$

$$\rho_1 < \rho < \rho_2.$$

如果 $h(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$，可把三曲面定理推广到满足

$$(L + h)[u] \geqslant 0$$

的函数上去．在所有的公式中我们只要用函数

$$N(\rho) = \max(M(\rho), 0)$$

代替 $M(\rho)$ 即可．

三圆周定理的一个不同的推广已由 E. M. Landis [2，3] 给出．

习　　题

1．假设 u 在环域 $1 < r < 2$ 中调和，并且

$$u(1,\theta) = \cos\theta, \quad u(2,\theta) = 3\cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

试求 $u\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 的上，下界．

2．假设 $u(x,y,z)$ 在整个三维空间中是下调和函数．如果当 $r^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 \to +\infty$ 时 $u \to 0$，$u(0,0,0) = 0$，试证明 $u \equiv 0$．利用三球面定理证明可以怎样减弱在 $(0,0,0)$ 和在 ∞ 的假设．

3．设 $(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2)^{1/2} = \rho$ 是椭球面族．如果 u 是整个三维空间中的下调和函数，试求出适当的指数 δ 使 $M(\rho)$ 是 ρ^δ 的凸函数．

4．已知 $u(x,y,z)$ 当 $z > 0$ 时是下调和函数，试对位于半空间 $z > 0$ 中的单参数球面族得出三球面定理．

第十三节　调和函数的导数

如果 $u(x,y)$ 是 D 中的调和函数，于是它的每一个导数也是调和函数，所以也满足最大值原理.

若 C_r 是以 (x_0,y_0) 为中心 r 为半径的圆周，在第一节中我们看到对任何调和函数平均值定理成立:

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r}uds=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}urd\theta.$$

用 r 同乘两边并关于 r 从 0 到一固定数 R 求积分:

$$\int_0^R ru(x_0,y_0)dr=\frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi}urdrd\theta$$

或

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi R^2}\iint_K udA, \tag{1}$$

其中 K 是包含在 D 中的以 (x_0,y_0) 为中心以 R 为半径的圆周的内部. 等式(1)是"面积平均值定理"的一个表述，这个定理断言: 调和函数在任一点 P 的值就是该函数在以 P 为中心(D 中)的任何圆域的面积上所取的平均值.

因为等式(1)对任何调和函数成立，又因 $\partial u/\partial x$ 仍然是调和函数，所以我们有

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{1}{\pi R^2}\iint_K\frac{\partial u}{\partial x}dA.$$

在上式右端应用散度定理就得到

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}u(x_0+R\cos\theta,y_0+R\sin\theta)R\cos\theta d\theta. \tag{2}$$

现若 u 在 D 的边界 ∂D 上满足不等式

$$m\leqslant u\leqslant M, \tag{3}$$

于是，由最大值原理知，同一不等式在 D 中处处成立. 若 c 是任何

常数，只要 u 调和，$u+c$ 就是调和函数。把(2)应用于函数 $u-\frac{1}{2}(M+m)$，得出

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{1}{\pi R}\int_0^{2\pi}\left[u-\frac{1}{2}(M+m)\right]R\cos\theta d\theta.$$

因此我们有估计

$$\left|\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}\right|\leqslant\frac{1}{\pi R}\int_0^{2\pi}\left|u-\frac{1}{2}(M+m)\right||\cos\theta|d\theta$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi R}\frac{M-m}{2}\int_0^{2\pi}|\cos\theta|d\theta$$

$$=\frac{2(M-m)}{\pi R}.$$

这样我们得到了 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的用 R 和 u 的最大、最小值表出的一个界。因为我们用坐标的旋转可使任何方向成为 x 方向（或进行类似的论证），于是我们就得到了任何方向上方向导数的估计。特别是我们可把方向取得和 u 的梯度重合。因此，若 u 在 D 的边界上满足(3)，则

$$|\text{grad } u(x,y)|\leqslant\frac{2(M-m)}{\pi d},\tag{4}$$

其中 d 是从 (x,y) 到边界上任何点的距离的最小值。也就是说，d 是以 (x,y) 为中心整个位于 D 中的最大圆域的半径。因为存在使(4)中等号成立的调和函数，所以不等式(4)已是这类不等式中最好的了。这个事实可由函数

$$u=\operatorname{tg}^{-1}\frac{2y}{1-(x^2+y^2)}\tag{5}$$

看出，它在单位圆域 K: $x^2+y^2<1$ 中调和，在原点有

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial y}=2.$$

另一方面，当 (x,y) 趋于 K 的边界上半部分时

$$u \to \frac{1}{2}\pi,$$

而当 (x,y) 趋于 K 的边界下半部分时

$$u \to -\frac{1}{2}\pi.$$

所以 $M - m = \pi$,因而(4)的右端有值2.

当 (x,y) 趋于 ∂D 时,因为点 d 趋于零,估计(4)变坏了.当 (x,y) 趋于 ∂K 时调和函数(5)的梯度的性态与 $1/d$ 相象,所以(4)的分母不能用一个比该点到边界距离 d 趋于零更慢的量来代替.

调和函数(5)有不连续的边值,似乎可以用它来论证是这些间断产生了当 (x,y) 趋于边界时 $|\mathrm{grad}u|$ 的增长.可是函数

$$u = y\log[(x-1)^2 + y^2] + 2(1-x)\mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{1-x}$$

在单位圆域 K 中调和并有连续边值,然而 $\mathrm{grad}u$ 在 K 中无界.简单的计算表明,当 $(x,y) \to (1,0)$ 时 $|\mathrm{grad}u|$ 的性态象

$$|\log[(x-1)^2 + y^2]|.$$

上面得到调和函数导数的界的方法可用于任何维数.设 ω_{n-1} 和 ω_n 分别表示 $(n-1)$ 维和 n 维单位球的表面积.对任何定义在区域 D 中的调和函数 u 的导数,我们能够推出不等式

$$|\mathrm{grad}u(x_1, x_2, \cdots, x_n)| \leqslant \frac{n\omega_{n-1}}{(n-1)\omega_n d}(M-m) \tag{6}$$

其中

$$m \leqslant u \leqslant M \quad 在\ \partial D\ 上,$$

d 是 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 到 ∂D 的最小距离.不等式(4)和(6)对调和函数有效,然而对下调和以及上调和函数都不对.

例. (i) 简单的下调和函数 $u = (x^2 + y^2) - 1$ 在单位圆域的边界上恒等于零;因此,在单位圆域中 u 的梯度不能以 u 在 ∂K 上的值为界.

(ii) 上调和函数

$$u=\begin{cases}1+\left[\dfrac{(3-\varepsilon^{-2}r^2)(1-\varepsilon^{-2}r^2)}{4\log(1/\varepsilon)}\right] & \text{当 } r\leqslant\varepsilon \text{ 时}\\ \dfrac{\log(1/r)}{\log(1/\varepsilon)} & \text{当 } r\geqslant\varepsilon \text{ 时}\end{cases}$$

当 $0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}$ 和 $0\leqslant r\leqslant 1$ 时满足 $0<u\leqslant 1+(3/4\log 2)$. 可是在 $r=\varepsilon$ 处

$$|\mathrm{grad}\,u|=1/[\varepsilon\log(1/\varepsilon)],$$

因此，即使到边界的距离是 $1-\varepsilon$，对充分小的 ε 梯度却是任意的大. 所以，一个有界上调和函数在离开边界任意远处可以有任意大的梯度. 对于下调和函数，用函数 $2-u$ 就得出同样的结论.

形状为(6)的估计有很多应用. 作为例子，我们得到调和函数弱形式的 Liouville 定理：如果 u 对所有 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 调和，并且有上、下界，则 u 是常数. 为证这个结论，只需在(6)中令 $d\to\infty$，就得到梯度必为零的结论. 如第十二节中所见，在二维情形，假设 u 下调和且有上界对得出 u 为常数的结论就足够了. 但是第 155 页附注(iv)中给出的例子表明在三维情形同一定理对下调和函数不成立. 在高维情形可构造类似的例子.

一般的二阶椭圆型方程解的一阶导数满足和(6)有相同特性的不等式. 为建立这些估计所需要的技巧并不初等，因为平均值定理不能用了，而且一般说来椭圆型方程解的导数本身不再是同一方程的解了. 对这一课题的讨论可见 Bers, John 和 Schechter [1, pp. 231—237] 或 Miranda [3, pp. 113—126 和 pp. 135—137].

得到一阶导数界的方法适用于求得任意阶导数的界. 我们对平面上调和函数的二阶导数来阐明这种技巧.

因为当 u 是调和函数时 $\partial u/\partial y$ 也如此，表示公式(2)可给出

$$\frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}=\frac{1}{\pi r^2}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)}{\partial y}r\cos\theta d\theta,$$

用 πr^3 同乘等式两端，并对 r 从 0 到 R 求积分，注意 $x=r\cos\theta$，我

们得到

$$\frac{1}{4}\pi R^4\frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}=\int_0^R\int_0^{2\pi}x\frac{\partial u}{\partial y}rdrd\theta$$

$$=\iint_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant R^2}x\frac{\partial u}{\partial y}dxdy.$$

把散度定理用于最后一个积分可得

$$\frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}=\frac{4}{\pi R^4}\int_0^{2\pi}R^3 u\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{2}{\pi R^3}\int_0^{2\pi}u\sin 2\theta d\theta.$$

在半径为 R 的圆周中心（x_0,y_0）处类似可得

$$\frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}u\cos 2\theta d\theta.$$

如果 u 在区域 S 中调和并在 ∂S 上满足 $m\leqslant u\leqslant M$，在(x_0, y_0)处对任何二阶导数(用 D^2u 表示)我们得到估计

$$|D^2u|\leqslant\frac{4(M-m)}{\pi d^2},$$

其中 d 是（x_0,y_0）到边界集 ∂S 任何点距离的最小值. 当（x_0,y_0）趋于边界时，我们看到调和函数的二阶导数的界和 d^{-2} 一样地趋向无穷. 更一般地，对调和函数的 k 阶偏导数有逐点估计

$$|D^k u|\leqslant\frac{A(M-m)}{d^k},$$

其中 A 是只依赖于 k 和自变量个数 n 的一个常数.

习　　题

1. 假设 $u(x,y)$ 在 D: $|x|<1$, $|y|<1$ 中调和，当 $|y|=1$ 时有边值 $u=|x|$，当 $|x|=1$ 时有边值 $u=|y|$. 求在$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$处 $\partial u/\partial x$ 的上，下界.

2. 假设在 D: $|x|<1$, $|y|<1$ 中 $\Delta u-u^3=0$. 如果在 ∂D 上 $u\equiv 1$, 求在(0,0)处 $\partial u/\partial x$ 的上，下界.

3. 假设 $u(x,y)$ 在单位圆域 D: $x^2+y^2<1$ 中调和. 求出使得

$$\left|\frac{\partial^3 u(P)}{\partial x^3}\right| \leqslant \frac{A(M-m)}{d^3}$$

成立的最小数 A，这里 $m \leqslant u \leqslant M$ 在 D 中成立，而 d 是 P 到 ∂D 的距离.

第十四节　导数的边界估计

在上节中我们得到了区域 D 中一点处调和函数梯度的界，它是用函数在边界 ∂D 上的最大值和最小值以及该点到边界的距离表出的. 在本节中我们要导出通过边值的导数表示的调和函数梯度的一致估计.

我们来证以下有用的引理.

引理. 如果 v 调和，则 v^2 下调和.

证明. 直接计算即得结果:

$$\Delta(v^2) = 2v\Delta v + 2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 \geqslant 0.$$

如果 u 是调和的，它的每个导数 $\partial u/\partial x_i$, $i=1,2,\cdots,n$，也如此. 从上述引理可得 $(\partial u/\partial x_i)^2$ 下调和，因为下调和函数的和仍下调和，我们发现

$$|\mathrm{grad}\,u|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$$

也是下调和函数. 我们要把最大值原理用于 $|\mathrm{grad}\,u|^2$ 以得出调和函数导数的界.

首先考虑估计两个变量的调和函数的一阶导数的问题. 假设 $u(x,y)$ 在有界平面区域 D 中是

$$\Delta u = 0$$

的解，并且

$$u = g(x,y) \quad 在\ \partial D\ 上.$$

我们希望得到 $\partial u/\partial \boldsymbol{n}$ 在边界上一点 P 的界. 可是，前节中我们给出了一个具有连续边值但其梯度在边界上变成无穷的调和函数的例子，所以我们知道至少函数 g 必须有某种程度的光滑性. 我们将设 g 能够延拓成 $D\cup\partial D$ 上的二次连续可微函数 $g(x, y)$. 于是 g 的 Δ 在 $D\cup\partial D$ 上有界,即存在数 $A>0$,使得

$$|\Delta g|\leqslant A \quad 在D中.$$

此外，对 D 的边界的光滑性我们要作假设. 设存在数 ρ 使得对 ∂D 上每点 P 可以画一个通过 P 点半径为 ρ 的圆周，并且该圆周的内部完全在 D 的外部. 这意味着,例如, D 不能有如图 29 所示的凹角.

固定 ∂D 上一点 $P(x_0, y_0)$，作半径为 ρ 的通过 P 点其内部 K_ρ 全在 D 外的圆周. 假设 D 有界，所以它包含在与 K_ρ 同心的半径为 R 的圆域 K_R 之中(图 30). 为方便计,取 K_ρ 的中心为极坐标系的原点,定义函数

$$z_1(x,y)=g(x,y)-\frac{1}{4}A\left[(R^2-\rho^2)\frac{\log(r/\rho)}{\log(R/\rho)}-r^2+\rho^2\right],$$

$$z_2(x,y)=g(x,y)+\frac{1}{4}A\left[(R^2-\rho^2)\frac{\log(r/\rho)}{\log(R/\rho)}-r^2+\rho^2\right].$$

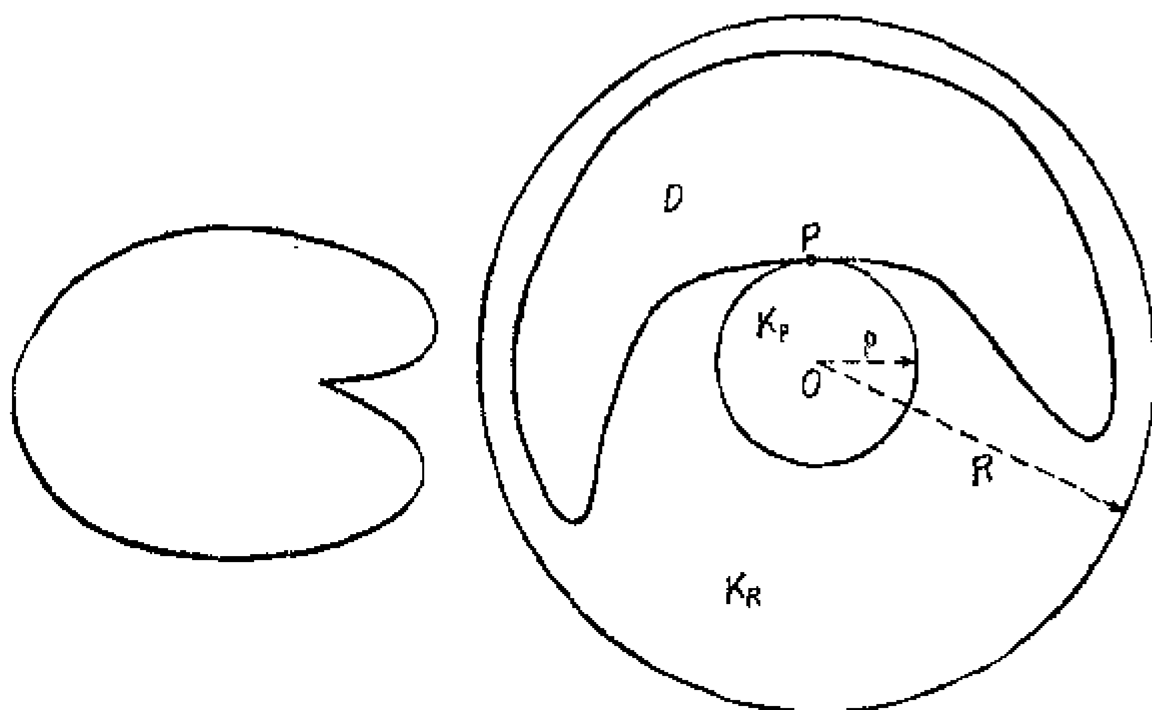


图 29　　　　图 30

简单的计算表明

$$\Delta z_1 \geqslant 0 \quad 在 D 中$$
$$z_1 \leqslant g \quad 在\ \partial D\ 上$$

和

$$\Delta z_2 \leqslant 0 \quad 在 D 中$$
$$z_2 \geqslant g \quad 在\ \partial D\ 上.$$

而且

$$z_1(x_0, y_0) = z_2(x_0, y_0) = g(x_0, y_0).$$

所以，把定理 7 中给出的最大值原理用于函数 $z_1 - u$ 和 $u - z_2$ 就给出了在 $P(x_0, y_0)$ 点的界

$$\frac{\partial z_2}{\partial \boldsymbol{n}} \leqslant \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \leqslant \frac{\partial z_1}{\partial \boldsymbol{n}}$$

或

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} - A\,\frac{R^2 - \rho^2 - 2\rho^2 \log(R/\rho)}{4\rho \log(R/\rho)} \leqslant \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$$
$$\leqslant \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} + A\,\frac{R^2 - \rho^2 - 2\rho^2 \log(R/\rho)}{4\rho \log(R/\rho)}. \tag{1}$$

根据假设，对 ∂D 的每一点我们可选同样的常数 ρ 和 R. 所以不等式(1)对所有的边界点有效.

现在注意由于在 ∂D 上 $u = g$, u 和 g 的切向导数在每个边界点上都一致. 所以在 ∂D 上每一点 P, $|\text{grad}(u - g)|$ 正好就是 $|(\partial/\partial \boldsymbol{n})(u - g)|$. 我们从(1)得到在 ∂D 上

$$|\text{grad}u| \leqslant |\text{grad}g| + A\,\frac{R^2 - \rho^2 - 2\rho^2 \log(R/\rho)}{4\rho \log(R/\rho)}.$$

因为在本节开始的引理中已经证明 $|\text{grad}u|^2$ 下调和，在 $D \cup \partial D$ 上 $|\text{grad}u|$ 的最大值必在边界上达到. 所以，对 D 中任何点 (x, y) 我们有

$$|\text{grad}u(x, y)| \leqslant \max_{\partial D} |\text{grad}g| + \sup_{D} |\Delta g| \frac{R^2 - \rho^2 - 2\rho^2 \log(R/\rho)}{4\rho \log(R/\rho)}.$$

对三个或更多变量的调和函数容易得到类似的界. 如果 D 有

界，并且 ∂D 足够光滑使得通过 ∂D 的每一点可构造通过点 P 的半径为 ρ 的球，其内部位于 D 之外，那么可以应用和二维情形中同样的论证．如果 n 是维数，比较函数 z_1 和 z_2 是

$$z_1(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) - \frac{A}{2n}\left[(R^2-\rho^2)\frac{\rho^{2-n}-r^{2-n}}{\rho^{2-n}-R^{2-n}} - r^2+\rho^2\right],$$

$$z_2(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) + \frac{A}{2n}\left[(R^2-\rho^2)\frac{\rho^{2-n}-r^{2-n}}{\rho^{2-n}-R^{2-n}} - r^2+\rho^2\right].$$

在 D 的任何点上 $|\mathrm{grad}u|$ 的界是

$$|\mathrm{grad}u(\boldsymbol{x})| \leqslant \max_{\partial D}|\mathrm{grad}g| + \sup_D|\Delta g| \times \frac{\rho}{2n}\left\{\frac{(n-2)(R^2-\rho^2)}{\rho^2[1-(\rho/R)^{n-2}]} - 2\right\}. \qquad (2)$$

区域 D 的**直径**是 D 中任何两点间距离的最小上界．如果 d 表示 D 的直径，那么，只要每个边界点都有通过它的适当类型的半径为 ρ 的球，我们就可选取 $R=d+\rho$．特别，如果 D 是凸的，我们能够令 $\rho\to\infty$ 得到对任何维数都有效的估计

$$|\mathrm{grad}u| \leqslant \max_{\partial D}|\mathrm{grad}g| + \frac{d}{2}\sup_D|\Delta g|.$$

对于更一般的椭圆型方程的解仍可能得到类似于(2)的估计．事实上，若应用逼近定理 13，则对带有混合边界条件的边值问题的解，我们有估计 $z_2(\boldsymbol{x})\leqslant u(\boldsymbol{x})\leqslant z_1(\boldsymbol{x})$．如果除定理 13 所需要的不等式外，还有 $z_2(\boldsymbol{x}_0)=u(\boldsymbol{x}_0)=z_1(\boldsymbol{x}_0)$，其中 $\boldsymbol{x}_0$ 是 ∂D 上给定 u 值本身的边界部分 Γ_2 的一点，那么，在点 $\boldsymbol{x}_0$ 显然有

$$\frac{\partial z_1}{\partial \boldsymbol{n}} \leqslant \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \leqslant \frac{\partial z_2}{\partial \boldsymbol{n}}.$$

因为在 $\boldsymbol{x}_0$ 切向导数已知，我们在这点就得到了 $|\mathrm{grad}u|$ 的界．

因为一般椭圆型方程解的梯度，一般说来，并不满足一个椭圆型微分不等式，所以我们**不能**通过简单地用一下最大值原理来得到内点上梯度的界．在形状为

$$L[u] \equiv a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

的二维椭圆型方程的情形，最后这个命题出现了例外．若 a, b 和 c 具有一阶连续导数，则容易看出 $\partial u/\partial x$ 满足一个椭圆型方程．记 $v=\partial u/\partial x$，只需微分上面的方程就得到

$$a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+2\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$+\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

从原方程 $L[u]=0$ 替换 $\partial^2 u/\partial y^2$，求出

$$L[v]+\left(\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{a}{c}\frac{\partial c}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+2\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{b}{c}\frac{\partial c}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

因此，$v=\partial u/\partial x$ 满足最大值原理．我们能够类似地证明 $\partial u/\partial y$ 也满足最大值原理．所以 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$ 都可用边界上 $|\mathrm{grad}u|$ 来估计．

习　　题

1.假设 $u(x,y)$ 在正方形 D: $|x|<1$, $|y|<1$ 中调和，当 $|y|=1$ 时有边值 $u=|x|$，当 $|x|=1$ 时有边值 $u=|y|$．求 $\partial u/\partial x$ 在 $(-1,0)$ 的上下界．

2.假设 u 在圆域 D: $r<1$ 中调和，u 有边值 $u(1,\theta)=e^{\cos\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$．求 $\partial u/\partial r$ 在 $(1,0)$ 点的界．

3.假设 $u(x,y)$ 满足椭圆型微分方程．证明 u^2 满足有相同主部的椭圆型微分不等式．

第十五节　导数估计的应用

在第十一节中我们讨论了由两个完全导体所围的区域中的电势差正好保持一个单位时在该区域中的静电势．这个势函数 u 是在一个导体上边值为 1 而在另一个导体上边值为 0 的调和函数．假设在导体间的某点 P 上放了一个单位电荷．于是作用在这个单位电荷上力的分量就由势函数 u 的一阶导数给出．这个力向量的

大小正好是$|\mathrm{grad}u|$，它可以用第十三和十四节的方法来估计．例如，第十三节对调和函数的不等式(6)说明

$$|\mathrm{grad}u(P)| \leqslant \frac{3\omega_2}{2\omega_3 d}(M-m) = \frac{3(M-m)}{4d},$$

可以被用于 $M=1, m=0$ 的特殊静电势的情形．我们求得

$$|\mathrm{grad}u(P)| \leqslant \frac{3}{4d}, \tag{1}$$

其中 d 是从区域的边界到点 P 的距离．上述不等式(1)尽管有用，但当点 P 趋于边界时就变弱了．在这种情形下，第十四节中用到的思想常常是有帮助的．一个特别的例子阐明了这种技巧．

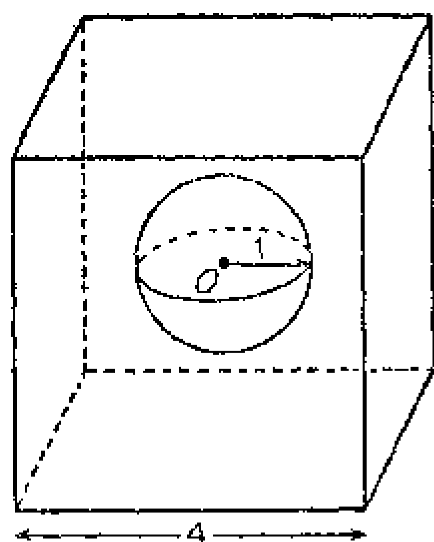


图 31

假设 D 是半径为 1 的球面和与球同心的边长为 4 的立方体之间的区域(图 31)．选取球心为坐标原点．设 $u(x,y,z)$ 是在球面上取值为 1 而在立方体表面上取值为 0 的一个调和函数，我们希望估计 $|\mathrm{grad}u|$．

根据最大值原理有 $0 \leqslant u \leqslant 1$．我们看到调和函数 $2-x-u$ 在 D 的边界上非负，所以最大值原理在 D 中给出不等式

$$0 < u < 2-x,$$

由定理 7 我们还发现在立方体的侧面 $x=2$ 上

$$-1 < \frac{\partial u}{\partial x} < 0,$$

因为在那里 $\partial u/\partial y = \partial u/\partial z = 0$，所以在立方体的这个面上 $|\mathrm{grad}u| < 1$．利用函数 $2+x-u$，$2 \pm y - u$ 和 $2 \pm z - u$ 我们可同样求得

$$|\mathrm{grad}u| < 1$$

在立方体所有的面上成立．

为了得到u在球面边界上梯度的界，我们注意到调和函数$u+1-2(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$在$D$的边界上非负．因此，由定理 6 知在$D$中

$$-1+2(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}<u<1,$$

并且由定理 7 知在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上

$$0<\frac{\partial u}{\partial n}<2.$$

在这个球面上切向导数是零，这样一来在D的边界上我们求得

$$|\mathrm{grad} u|<2. \tag{2}$$

因此，再由最大值原理得到估计(2)在整个区域D中成立．注意这个估计直到边界都有效，所以当P靠近边界时它比不等式(1)要好．但是对于远离边界的点，(2)就是比(1)弱的不等式．

在与流体的流动有关的问题中调和函数导数估计是很重要的．在某种理想的条件下，不可压缩流体的运动由一个势函数决定，这个函数满足 Laplace 方程并有以下性质：它的一阶导数是流体质点速度的分量．如果u表示势函数，则速度的大小(称为**速率**)就由 $|\mathrm{grad} u|$ 给出．因为 $|\mathrm{grad} u|^2$ 下调和，我们能够利用最大值原理来得到关于运动的信息．特别地，我们考虑一个物体穿过理想流体的二维运动(在适当的条件下，可以认为空气和水是理想流体)．用坐标变换可得出一个等价的问题，即运动的流体绕过静止物体(称为障碍)的问题(图 32)．势函数定义在固定障碍外

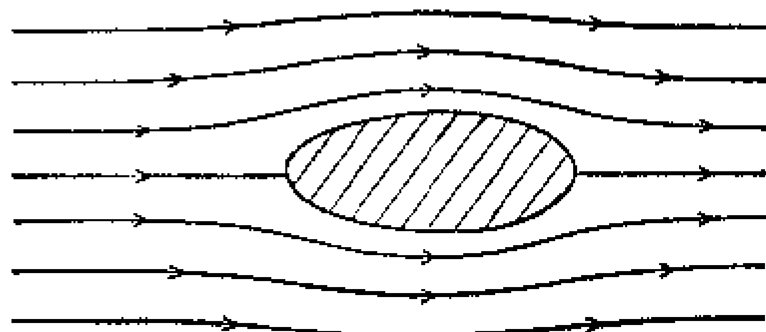


图 32

的整个平面上，它的表面就是这个流体流场的边界．在空间每点

流动的速率由 $|\text{grad}u|$ 给出，并且最大值原理给出了重要的结论：最大速率必定在障碍物表面上的一点上达到.

如果具有单连通二维横截面D的一根长柱形杆在它的端点被扭曲，那么在每个横截面上产生剪应力. 利用D平面上的 x, y 坐标可把应力表示为函数 v（称为应力函数）的导数. 我们记

$$\tau_1 = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\tau_2 = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

其中 τ_1 和 τ_2 是应力的(x,z)和(y,z)分量. 应力函数 v（采用适当的测量单位）是方程

$$\Delta v = -2 \quad 在 D 中$$

以及

$$v = 0 \quad 在 \partial D 上$$

的解.［注意函数

$$u = v + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

满足 Laplace 方程，并且在 ∂D 上 $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.］应力的大小由$\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} = |\text{grad}v|$ 给出. 因为$\partial v/\partial x$ 和$\partial v/\partial y$ 调和，由此可得

$$\Delta(|\text{grad}v|^2) \geqslant 0.$$

所以，最大应力必在D的边界上达到. 弹性区域何时终止，形变的塑性区域何时开始的问题与最大应力的大小和位置密切相关.

利用第十四节的方法，我们能够得到最大应力大小的估计. 例如，若D是最大宽度为B的凸区域，则对 ∂D 上的任何点P，我们可选取 $z_1(Q) \equiv 0$，$z_2(Q) = \frac{1}{4}B^2 - \left(\xi - \frac{1}{2}B\right)^2$，其中$\xi$是沿点$P$处边界的法向量上的线段$PQ$的长度，于是

$$-B \leqslant \frac{\partial v(P)}{\partial n} \leqslant 0,$$

因为在 ∂D 上 $v=0$，可知它在边界上的切向导数为零。所以在 D 中

$$|\mathrm{grad} v| \leqslant B.$$

我们还能够用最大值原理来求区域形状和大小的变化对应力的影响。设 D_1 是 D 的子区域，使得 ∂D 和 ∂D_1 有公共点并设 $P\in \partial D\cap\partial D_1$ (见图 33)。

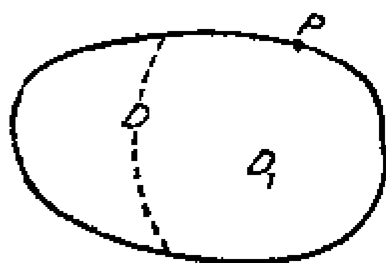


图 33

我们用 v 和 v_1 分别表示 D 和 D_1 的应力函数。因为 v 和 v_1 上调和，从最大值原理可得在 D 中 $v>0$ 以及在 D_1 中 $v_1>0$。我们在 $D_1\cup\partial D_1$ 中定义 $w=v-v_1$，并注意在 ∂D_1 上 $w\geqslant 0$，在 D_1 中 $\Delta w=0$。所以在 D_1 中 $w>0$。在点 P 有 $v(P)=v_1(P)=0$，由定理 7，我们得到结论

$$\frac{\partial v(P)}{\partial n}<\frac{\partial v_1(P)}{\partial n}.$$

把定理 7 用于上调和函数 v_1，还有 $\partial v_1(P)/\partial n<0$。因为 v 和 v_1 的切向导数在点 P 等于零，在点 P 我们又得

$$|\mathrm{grad} v|>|\mathrm{grad} v_1|.$$

我们可以这样解释这个不等式：去掉杆的一部分(所以它的横截面减小了）将使单位长度上产生给定大小的扭曲所需应力的量值减小。我们知道细杆比粗杆容易扭曲，所以上述不等式和我们的直观是一致的。

这类比较定理能够用于通过可以显式确定或容易估计的区域中的应力来估计给定区域上的应力。见 Weinberger [1]。

第十六节 非线性算子

在第一章第九节中我们表明了怎样利用最大值原理来得到非线性常微分方程的种种结果．现在我们要用同样的方法得到有关非线性偏微分方程解的信息．

设 $F(x,y,u,p,q,r,s,t)$ 是它的八个变量的连续可微函数．我们说两个变量的函数 $u(x,y)$ 是偏微分方程

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f(x,y) \tag{1}$$

在区域 D 中的解，如果在 D 的每一点 (x,y)，把

$$\left.\begin{aligned} &u=u(x,y),\ p=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\ q=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y},\\ &r=\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y},\ t=\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

代入 F 后得到的值等于给定函数 $f(x,y)$．

例． 如果我们选取

$$F=(1-p^2)r+(1+q^2)t+1,$$

它对应的微分方程就是

$$\left[1-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+1=f(x,y). \tag{3}$$

如果对于任何满足 $\xi^2+\eta^2>0$ 的实数对 (ξ,η)，当把(2)给出的值代入 F 时有

$$\frac{\partial F}{\partial r}\xi^2+\frac{\partial F}{\partial s}\xi\eta+\frac{\partial F}{\partial t}\eta^2>0, \tag{4}$$

我们就说方程(1)关于特定函数 $u(x,y)$ 在点 (x,y) 是椭圆型的．如果(1)在 D 的每一点是椭圆型的，我们就说它在区域 D 中是椭圆型的．一个非线性方程可以对某些函数是椭圆型的，但对另一些函数则不是．例如，对于使 $|\partial u/\partial x|<1$ 的那些函数 u 方程(3)是椭圆型的，否则就不是椭圆型的．当然，如果(1)是线性的，则

(4)的左端与 u 无关并且其椭圆性只依赖于在 D 的每点 (x,y) 上 F 的特性.

现在我们希望建立一些条件，使得在这些条件下非线性椭圆型方程满足最大值原理。假设 $u(x,y)$ 是(1)的解，而 $w(x,y)$ 满足微分不等式

$$F\left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \leqslant f(x,y).$$

作函数

$$v(x,y) = u(x,y) - w(x,y),$$

用下标表示偏导数，我们来考虑不等式

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}) - F(x,y,w,w_x,w_y,w_{xx},w_{xy},w_{yy}) \geqslant 0.$$

把多元微积分的中值定值用于上面不等式的左端，其结果是：

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0 \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 v \geqslant 0, \quad (5)$$

其中下标"0"表示导数是在变元 $(x,y,u_0,p_0,q_0,r_0,s_0,t_0)$ 处计算的，而

$$u_0 = w + \theta(u - w),\ p_0 = w_x + \theta(u_x - w_x),$$
$$q_0 = w_y + \theta(u_y - w_y),\ r_0 = w_{xx} + \theta(u_{xx} - w_{xx}),$$
$$s_0 = w_{xy} + \theta(u_{xy} - w_{xy}),\ t_0 = w_{yy} + \theta(u_{yy} - w_{yy}),$$

量 $\theta = \theta(x,y)$ 在每点 (x,y) 是 0 和 1 之间的某数.

对 D 中每点 (x, y)，我们假设 F 对所有形状为 $\theta w + (1-\theta)u$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ 的函数都是椭圆型的. 那么(5)是函数 v 的一个线性椭圆型微分不等式. 我们可以应用定理 6 来得到结论：如果 v 不是常数并且

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 \leqslant 0,$$

则 v 不能在 D 的任何点上有非负最大值. 这个最大值原理立即给

出如下的逼近定理.

定理 31. 设 $u(x,y)$ 是

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=f(x,y) \quad 在D中,$$
$$u=g \quad 在\ \partial D\ 上$$

的一个解. 设 z 和 Z 满足不等式

$$F(x,y,Z,Z_x,Z_y,Z_{xx},Z_{xy},Z_{yy})\leqslant f(x,y)$$
$$\leqslant F(x,y,z,z_x,z_y,z_{xx},z_{xy},z_{yy}) \quad 在D中 \tag{6}$$

和

$$z(x,y)\leqslant g(x,y)\leqslant Z(x,y) \quad 在\ \partial D\ 上.$$

我们假设对每个使 $0\leqslant\theta\leqslant 1$ 的常数 θ, 函数 F 在 D 中关于 $u+\theta(z-u)$ 和 $u+\theta(Z-u)$ 是椭圆型的, 并且在 D 中 $\partial F/\partial u\leqslant 0$。那么我们有

$$z(x,y)\leqslant u(x,y)\leqslant Z(x,y) \quad 在D中.$$

在应用定理 31 时, 当试图建立 F 对所要求的函数类 $\theta z+(1-\theta)u$ 的椭圆性时出现了困难, 因为一般说来 u 是未知的. 然而, 有些情形下能够消除这个困难. 我们给出几个例子.

假设 Γ 是三维空间中的简单闭曲线, 它与 z 方向的每条直线至多相交一次, 并且它在 x,y 平面上的投影是凸的. 可以证明存在绷在这条空间曲线 Γ 上的面积最小的曲面. 这个曲面的方程是 $z=u(x,y)$ 且 u 满足非线性方程

$$(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0. \tag{7}$$

用本节开始用的记号, 极小曲面方程(7)具有形式

$$F\equiv(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.$$

椭圆型条件(4)变成

$$F_r\xi^2+F_s\xi\eta+F_t\eta^2\equiv(1+q^2)\xi^2-2pq\xi\eta+(1+p^2)\eta^2$$
$$=\xi^2+\eta^2+(q\xi-p\eta)^2>0, \tag{8}$$

所以当 $\xi^2+\eta^2>0$ 时(4)成立. 因此极小曲面方程永远是椭圆型的.

因为任何常数满足(7), 于是令 z 和 Z 为常数则可把定理 31 用于极小曲面方程. 注意到 $\partial F/\partial u\equiv 0$, 我们得出任何极小曲面

必在边界上达到其最大值和最小值，即极小曲面不能有垂直的凸出部，如果曲面面积要尽可能的小，这在直观上是很显然的一个结果.

因为任何线性函数也是(7)的解，所以我们发现极小曲面必定整个地位于在其边界曲线 Γ 下方的任何平面之上. 类似，它也必定整个地在任何位于 Γ 上方的平面之下，即与极小曲面的内点相交的任何平面必定也和它的边界相交.

长期以来，极小曲面方程和它的解曾被广泛地研究过. 有关由最大值原理而得的性质可参阅 Bernstein [1], Bers [2], Finn [1], Nitsche [1], Serrin [7] 以及这些论文中列出的参考文献.

作为第二个例子，我们考虑

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=f(x,y). \tag{9}$$

这个方程是 Monge-Ampere 方程（它是许多微分几何问题中提出的一类方程)的一个特殊情形. 利用由 (4) 给出的椭圆性判别准则，我们得到

$$t\xi^2-2s\xi\eta+r\eta^2>0.$$

因而每当 $rt-s^2$ 为正时，(9)或用(−1)乘(9)所得的方程就是椭圆型的. 如果我们假设

$$f(x,y)>0 \quad 在D中,$$

于是对 D 中所有的解(9)是椭圆型的. 建立(9)关于整族函数 $u+\theta(z-u)$ 的椭圆性往往是困难的. 例如，函数

$$Z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(x^2+y^2),\ z=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \tag{10}$$

在圆域 K: $x^2+y^2<1$ 中都满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=1,$$

并且 z 和 Z 在 ∂K 上都有边值 1. 因此，我们看到 Monge-Ampere

方程的 Dirichlet 问题没有唯一解[1]. 而且当 $u = z$ 时破坏了定理 31. 尽管方程关于 z 和 Z 是椭圆型的，但是因为它关于 $\frac{1}{2}(z + Z)$ 不是椭圆型的，所以不满足定理的条件.

作为最后一个例子，我们考虑方程

$$[\mu(|\text{grad}\phi|) - \phi_y^2]\phi_{xx} + 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + [\mu(|\text{grad}\phi|) - \phi_x^2]\phi_{yy} = 0, \qquad (11)$$

这是在研究可压缩流体的流动时提出的方程. 流动速度的 x 和 y 分量由

$$\left(\frac{1}{\rho}\phi_y, \ -\frac{1}{\rho}\phi_x\right) \qquad (12)$$

给出，在任何点的速率 q 是 $|\text{grad}\phi|/\rho$. 我们假设压力 p 是密度 ρ 的已知函数. 于是 μ 等于 $\rho^2 dp/d\rho$，由 Bernoulli 关系式 $|\text{grad}\phi|^2 = 2\rho^2\int_\rho^{\rho_0}\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}d\rho$ 解出 ρ，它就表示成了 $|\text{grad}\phi|$ 的函数. 常数 ρ_0 由在无穷远处规定的条件确定. 因为

$$(d/d\rho)\left\{2\rho^2\int_\rho^{\rho_0}\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}d\rho\right\} = 4\rho\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}d\rho - 2\rho\frac{dp}{d\rho}$$

$$= 2\rho\left(q^2 - \frac{dp}{d\rho}\right),$$

只要 $q^2 < dp/d\rho$ 我们解出 Bernoulli 关系式使 ρ 成为 $|\text{grad}\phi|$ 的单值函数. 这样，当 q 小到足以使 $q^2 < dp/d\rho$ 成立，函数 $\mu(|\text{grad}\phi|)$ 就有定义. 可以证明局部声速是 $\sqrt{dp/d\rho}$. 因此，使 $q^2 < dp/d\rho$ 的流动称为亚音速的. 回忆 $|\text{grad}\phi|^2 = \rho^2 q^2$ 和 $\mu(|\text{grad}\phi|) = \rho^2 dp/d\rho$，可把不等式 $q^2 < dp/d\rho$ 改写成形式

$$|\text{grad}\phi|^2 < \mu(|\text{grad}\phi|). \qquad (13)$$

---

1) 可以证明对一般的 Monge-Ampère 方程 $A_1(rt - s^2) + A_2 r + A_3 s + A_4 t + A_5 = 0$，当 $u, A_1, A_2, \cdots, A_5$ 使方程为椭圆型时，Dirichlet 问题至多有两个解. 见 Courant 和 Hilbert [1, p. 324].

速度向量 (12) 与 $\phi =$ 常数的曲线(称为流动的流线)相切. 函数 $\phi = \phi(x, y)$ 称为流函数. 单位时间内在两条流线 $\phi = a$ 和 $\phi = b$ 之间流过的质量是 $b - a$.

我们看到

$$
\begin{aligned}
&[\mu(|\operatorname{grad}\phi|) - \phi_y^2]\xi^2 + 2\phi_x\phi_y\xi\eta + [\mu(|\operatorname{grad}\phi|) - \phi_x^2]\eta^2 \\
&\quad = [\mu(|\operatorname{grad}\phi|) - |\operatorname{grad}\phi|^2](\xi^2 + \eta^2) + (\phi_x\xi + \phi_y\eta)^2 \\
&\quad \geqslant [\mu(|\operatorname{grad}\phi|) - |\operatorname{grad}\phi|^2](\xi^2 + \eta^2),
\end{aligned}
$$

所以,由(13)知方程(11)关于任何亚音速流动是椭圆型的.

现在,我们把最大值原理用于方程(11),随之给出它的一个应用. 考虑由两个刚壁夹住的无穷长通道中的亚音速流动. 在左右两边充分大距离处,即当 $|x|$ 充分大时,我们假设壁是与 x 轴平行的直线(见图 34). 把总的质量流量称为 A,流函数是 ϕ, 在下壁上选 $\phi = 0$, 在上壁上 $\phi = A$. 我们假设当 $x \to \pm\infty$ 时流动变成均匀的水平流动. 更特别地,如图 34 所示, 把壁的直线部分的方程记作 $y = a_1$, $y = a_2$, $y = b_1$, $y = b_2$, 并假设对 y 一致地有

$$
\lim_{x \to -\infty} \phi(x, y) = A\frac{y - a_1}{a_2 - a_1}, \quad \lim_{x \to +\infty} \phi(x, y) = A\frac{y - b_1}{b_2 - b_1}. \tag{14}
$$



图 34

我们看到方程 (11) 左端的表达式关于 ϕ 的二阶导数是线性的. 这类方程称为拟线性方程. 如果我们把这些二阶导数的系数看作是 x, y 的固定函数, 易见 ϕ 满足不带低阶项的一个线性二阶椭圆型微分方程. 所以可应用定理 5 和 7. 特别在整个通道中 $0 < \phi < A$.

用D表示通道，我们考虑第二个通道D_1，它是通过增加D的下壁上有限部分的高度而得的D的一个子区域。这个改变的部分在图 34 中用虚线表示。

设ψ_1是对应于通过通道D_1的亚音速流动的流函数，它带着和原来由ψ所描述的流动同样的质量流量A。于是ψ_1在D_1中满足微分方程(11)，在D_1的下壁上边界条件是$\psi_1 = 0$，上壁上是$\psi_1 = A$。函数ψ_1还满足条件(14)。

因为方程(11)是拟线性的，我们发现ψ的方程与ψ_1的方程之差可以写成形式

$$\begin{aligned}
&[\mu(|\mathrm{grad}\psi|) - \psi_y^2](\psi - \psi_1)_{xx} + 2\psi_x\psi_y(\psi - \psi_1)_{xy} \\
&\quad + [\mu(|\mathrm{grad}\psi|) - \psi_x^2](\psi - \psi_1)_{yy} \\
&\quad + [(\psi + \psi_1)_y\psi_{1xy} - (\psi + \psi_1)_x\psi_{1yy}](\psi - \psi_1)_x \\
&\quad + [(\psi + \psi_1)_x\psi_{1xy} - (\psi + \psi_1)_y\psi_{1xx}](\psi - \psi_1)_y \\
&\quad + \Delta\psi_1[\mu(|\mathrm{grad}\psi|) - \mu(|\mathrm{grad}\psi_1|)] = 0.
\end{aligned}$$

若把中值定理用于最后一项，可得一个$(\psi - \psi)_x$和$(\psi - \psi)_y$的线性组合。这样我们发现$\psi - \psi_1$满足一个线性椭圆性方程，于是现在可把定理 5 和 7 用于差$\psi - \psi_1$。在D_1的上壁有$\psi - \psi_1 = 0$，在D_1的下壁有$\psi - \psi_1 \geqslant 0$，还有

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\psi - \psi_1) = 0.$$

我们得到结论

$$\psi > \psi_1 \quad 在 D 中。$$

因为在公共的边界壁上$\psi = \psi_1$，又得到

$$\frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{n}} < \frac{\partial\psi_1}{\partial \boldsymbol{n}} \quad 在\ \partial D \cap \partial D_1\ 上。\tag{15}$$

由于在D中$0<\psi<A$，在上壁$\psi \equiv A$。因此在上壁有$\partial\psi/\partial\boldsymbol{n} > 0$；在那里类似可得$\partial\psi_1/\partial\boldsymbol{n} > 0$。因而(15)蕴涵着

$$|\mathrm{grad}\psi_1| > |\mathrm{grad}\psi| \quad 在上壁。$$

不难证明速率q是$|\mathrm{grad}\psi|$的增函数，所以，用q_1表示对应于ψ_1的速率，我们在上壁有

$$q_1 > q.$$

在 D 和 D_1 的下壁的公共部分上，我们发现 $\partial\phi/\partial\boldsymbol{n} < \partial\phi_1/\partial\boldsymbol{n} < 0$. 因此，在下壁的公共部分上 $q_1 < q$.

我们已经证明：当把一个壁的一部分变凹而使通道变窄时，对面壁上的速率将增大，但变凹的壁上未改变部分上的速率将减小。

附注. (i) 在上述的比较中，我们只用到以下事实：方程(11)是拟线性的以及它关于 ϕ 是椭圆型的．若函数 $\mu(|\text{grad}\phi|)$ 使方程(11)关于所有使它有定义的函数都不是椭圆型的，这个结果仍将成立。特别，关于第二个解 ϕ_1 它不必是椭圆型的。

(ii) 这种类型的其它比较定理可在 Gilbarg [2, 4] 和 Serrin [4] 中找到。

文 献 注 记

对调和（以及下调和）函数的最大值原理要追溯到 C. F. Gauss [1] 和 S. Earnshaw [1]. 在二维的情形当 $h < 0$ 时，比 Laplace 算子更一般的椭圆算子最大值原理的第一个证明是由 A. Paraf [1] 给出的. E. Picard [1, pp. 29—30] 和 L. Lichtenstein [1,2] 把这个结果推广到了 $h \leqslant 0$ 的情形.

T. Moutard [1] 把 Paraf 的结果推广到了高于二维的情形. 这个结果为 M. Picone [1] 用来得到了广义最大值原理. 第三节的定理 5 和 6 是属于 E. Hopf 的，其中关于系数不作连续性假设.

对应于 Laplace 算子第一边值问题的 Green 函数满足 $\partial G/\partial\boldsymbol{n} < 0$ 的事实是 C. Neumann [1] 和 A. Korn [1] 证明的. L. Lichtenstein [2]把这个结果推广到了更一般的算子上去. 在关于系数的某些连续性假设下 G. Giraud [1,2] 证明了第三节的定理 7 和 8. 本章给出的一般形式是 E. Hopf[2] 和 O. Oleĭnik [1] 各自独立发现的. D. Gilbarg [4] 给出了两个变量散度形式的椭圆型方程的一个类似的结果.

在关于系数的最少假设下形式非常一般的最大值原理是 A. D. Aleksandrov [1,2,3] 和 C. Pucci [8] 给出的. C. Pucci [2,3,5] 和 M. Picone [1.4] 已经得到了对某些点上不是椭圆型的偏微分方程的推广.

人们曾通过各种途径来推广最大值原理. W. Littman [1,2] 给出了对椭圆型不等式弱解的推广. 推广到非线性算子的结果已被 S. S. Dymkov [1],

O. A. Ladyzhenskaya [1], A. McNabb [2], L. Nirenberg [2], M. Nagumo 和 S. Simoda [1], 以及 R. M. Redheffer [1, 2, 3, 4] 等得到. F. Calabi [1] 给出了最大值原理在几何上的一个推广和应用. 推广到弱耦合方程组的结果是属于 P. Szeptycki [1]的. 当系数在边界上变得有奇性的情形, M. Schechter [1] 曾给出了一个最大值原理. 二阶导数以散度形式出现的方程对系数假设最少的强最大值原理是 G. Stampacchia [1]给出的.

有时候在广义的意义下最大值原理的概念可用来表明边值问题解的某种范数(不必是最大值范数)能用其边值的范数来估计. A. D. Aleksandrov [1,2] 得到了以各种积分范数表出的椭圆型方程的这种最大值原理. 关于高阶椭圆型方程和方程组的最大值范数的这种最大值原理的结果, 可以在 C. Miranda [1, 2], S. Agmon [1], G. Fichera [4] 以及 R. J. Duffin [2] 等工作中找到.

许多教科书(例如: R. Courant 和 D. Hilbert [1], P. Garabedian [1]以及 H. F. Weinberger [4])中都包含最大值原理的讲解.

在许多作者的工作中能够见到最大值原理被用作线性和非线性方程逼近理论的工具, 并且成为得到估计的一种辅助手段. 例如, 早在 1910 年 S. N. Bernstein [1] 就得到了椭圆型方程解的梯度估计. 较新的导数估计已被 S. N. Bernstein [2], O. A. Ladyzhenskaya [1] 以及 L. Nirenberg [2] 得到. 逼近方面的结果(其中最大值原理是本质的部分)可在 L. Collatz [1, 3, 4], L. Bers [1], C. Clark 和 C. A. Swanson [1], A. G. Meyer [1] 以及 W. Walter [2] 等工作中找到.

第七节的材料以 Green 恒等式为基础, 这些材料可在诸如 O. D. Kellogg [1] 和 H. F. Weinberger [4] 等标准教科书中找到. 一般二阶椭圆型算子对应的公式已由 W. Feller [1] 给出.

第八节中给出的椭圆型算子特征值的估计取材于 M. H. Protter 和 H. F. Weinberger [2]. J. Barta [1] 在 1937 年得到了 Laplace 算子的相应结果. 此后, R. J. Duffin [1], C. Clark 和 C. A. Swanson [1], P. Hartman 和 A. Wintner [1], J. Hersch [1,2], W. Hooker [1], K. Kreith [1] 以及 M. H. Protter [2] 发展了种种特征值的下界估计以及有关的比较定理.

古典的 Phragmèn-Lindelöf 定理可在函数论的教科书中找到. 例如 E. C. Titchmarsh [1] 叙述了解析函数的 Phragmèn-Lindelöf 定理. 也可以看 M. H. Heins [1]. H. F. Weinberger [4] 给出的调和函数的结果. 对椭圆型算子的各种形式的 Phragmèn-Lindelöf 原理曾由 G. N. Blohina [1], A.

Friedman [1], D. Gilbarg [1,4], E. Hopf [3], E. M. Landis [1], A. Pfluger [1], J. B. Serrin [5], N. Meyers 和 J. B. Serrin [1] 以及 P. C. Fife [1] 得到. Huber [1], Gilbarg 和 Serrin [1] 以及 C. Pucci [7] 处理过有关椭圆型方程解的孤立奇点的问题.

带有光滑系数的二阶椭圆型方程的 Harnack 型不等式曾由 L. Lichtenstein [1] 和 W. Feller [1] 得到. 第十节定理23的证明遵循了 J. B. Serrin [6] 的证明方法. 这个定理的另一种证明以及二维情形的另一个 Harnack 不等式是 L. Bers 和 L. Nirenberg [1] 给出的. J. Moser [1], J. B. Serrin [7] 以及 G. Stampacchia [1] 得到了 n 个变量线性方程的 Harnack 不等式. E. Bohn 和 L. K. Jackson [1], J. B. Serrin [8] 和 N. S. Trudinger [1] 处理了非线性的情形. D. Gilbarg 和 J. B. Serrin [1] 曾得到了关于孤立奇点的定理. 不作一致椭圆性假设的二维 Liouville 定理是 S. N. Bernstein [2] 给出的.

关于一个集合的容量的定义及初等性质，见 G. Polya 和 G. Szegö [1] 或 O. D. Kellogg [1]. 第十一节中推出的不等式可在 M. H. Protter 和 H. F. Weinberger [1] 中找到.

古典的 Hadamard 三圆周定理通常是通过一个解析函数的最大模来表述的. 这种形式的定理可在 E. C. Titchmarsh [1] 和 M. H. Heins [2] 中找到. 对一般二阶椭圆型方程的解以及使用各种范数的推广和一般化曾由 S. Agmon [2], E. M. Landis [2,3] 以及 K. Miller [1] 得到.

最大值原理，特别是这种形式的 Phragmén-Lindelöf 定理曾被极其成功地用在流体流动的问题中. 包含两个流动的比较以及在无穷远处利用最大值原理的有关结果，参看 L. Bers [2], R. Finn 和 D. Gilbarg [1,2], D. Gilbarg [2, 3, 4], D. Gilbarg 和 M. Shiffman [1], M. Lavrentiev [1], 以及 J. B. Serrin [1,2,3,4].

有关结果的广泛详尽的综述可在 L. Bers, F. John 和 M. Schechter [1], A. Friedman [4] 以及 C. Miranda [3] 等书以及 O. A. Ladyzhenskaya 和 N. N. Ural'tzeva [1] 以及 E. M. Landis [1,3] 的综合性文章中找到.

第三章 抛物型方程

第一节 热传导方程

设一条长度为 l 的细长杆位于 x 轴的区间 $(0,l)$ 上。我们假设杆的材料是均匀的，热量可以进入此杆或从杆中流出[1]。我们还假设杆上任一点的温度 u 仅仅是横截面的位置 x 和时间 t 的函数，记之为 $u=u(x,t)$。对杆的物理性质作了某些假设之下，决定杆中热流(取适当的单位)的微分方程就是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,t).$$

函数 f 是杆中热量的散失率。温度函数 $u(x,t)$ 所满足的最大值原理与对椭圆型方程和不等式所建立的最大值原理多少有点不同。

假定 $u(x,t)$ 在 x, t 平面的区域 E 中(图 1)满足严格的不等式

$$L[u]\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}>0,$$

显然 u 不能在任何内点上取到(局部)最大值。因为在这样的点上

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\leqslant 0$$

和

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0,$$

1) 即杆中可有热源或冷源。——译者注

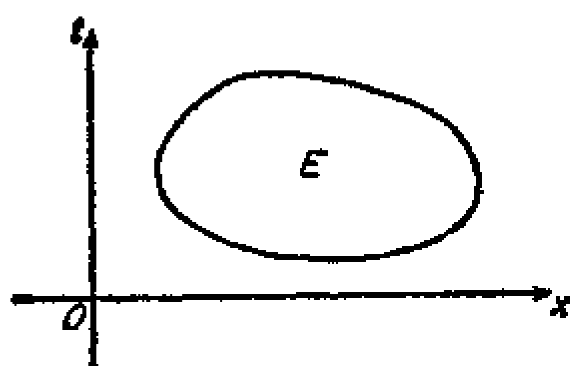


图 1

从而破坏了 $L[u]>0$. 我们不仅要把这个论断推广到 $L[u]\geqslant 0$ 的解上去，而且我们还将证明对于这类算子，最大值原理有更强的形式.

为了阐明一个典型问题，我们假定上面所说的杆的初始(即在时刻 $t=0$ 的)温度给定，并且杆的端点的温度是时间 t 的已知函数. 因果性原理表明: 在任一固定时刻 T 的温度分布不受杆在 $t>T$ 时产生的任何温度变化的影响. 这样一来，自然应考虑 x，t 平面中的矩形区域

$$E:\ \{0<x<l, 0<t\leqslant T\}. \tag{1}$$

我们假设在 E 的三条边

S_1: $\{x=0, 0\leqslant t\leqslant T\}$, S_2: $\{0\leqslant x\leqslant l, t=0\}$,

S_3: $\{x=l, 0\leqslant t\leqslant T\}$

上，温度 $u(x,t)$ 已知. 根据物理学的知识，我们预期这些信息加上 u 在 E 中满足方程

$$L[u]\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

的事实就足以唯一地确定整个 E 上的温度(图 2). 作为下面的最大值原理的一个推论，容易建立解的唯一性.

定理 1. 假设 $u(x,t)$ 在矩形区域(1)中满足不等式

$$L[u]\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\geqslant 0. \tag{2}$$

则 u 在闭包 $E\cup\partial E$ 上的最大值必在三边 S_1, S_2 或 S_3 之一上取

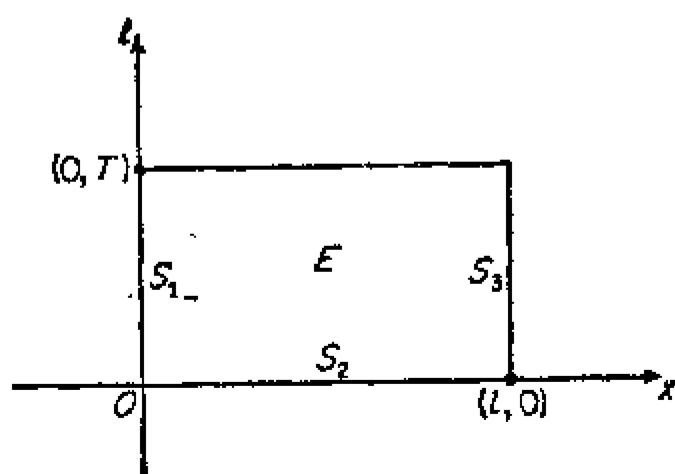


图 2

到(图 2)。

证明. 假设M是u在S_1，S_2和S_3上的最大值，我们将假设在E的一点$P(x_0,t_0)$处u的值$M_1 > M$，并得出矛盾。定义辅助函数

$$w(x) = \frac{M_1 - M}{2l^2}(x - x_0)^2.$$

因为在S_1,S_2和S_3上$u \leqslant M$，于是对S_1,S_2,S_3上所有的点我们有

$$v(x,t) \equiv u(x,t) + w(x) \leqslant M + \frac{M_1 - M}{2} < M_1. \qquad (3)$$

而且

$$v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) = M_1, \qquad (4)$$

在整个E上还有

$$L[v] \equiv L[u] + L[w] = L[u] + \frac{M_1 - M}{l^2} > 0. \qquad (5)$$

条件(3)和(4)表明v必定或在E的一个内点或沿开区间

$$S_4:\ \{0 < x < l,\ t = T\}$$

达到它的最大值。不等式(5)表明v不能有内部最大值点。 在S_4中的最大值点处，我们有$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leqslant 0$，它蕴涵着$\dfrac{\partial v}{\partial t}$严格为负。于是$v$必在某一较早的时刻更大，所以$E$中的最大值也不可能在$S_4$中达到。这样我们看出假设$u(x_0,t_0) > M$导致了矛盾。

附注. (i) 本定理表明最大值不仅不能在 E 的内点取到，而且除可能在杆的端点外，也不能在"最后"时刻取到。

(ii) 定理 1 的最大值原理不是强形式的最大值原理，因为这个定理允许在边界上和内点同时取到 u 的最大值. 以后我们将会看到如果能在 E 中取到最大值，那么解必定在某个区域中是常数，这一结果包含定理 1 作为一个特殊情形。

(iii) 当我们用 $-u$ 代替 u 时，对 $L[u]=0$ 的解得到一个相应的最小值原理.于是，早些时候提到的唯一性定理就很容易推出了.

(iv) 椭圆型微分不等式的解的最大值可以在边界上的任何地方达到. 在热传导方程的情形，我们有更强的结果，即最大值只能在边界的特定部位上达到. 对于以热传导方程为原型的更一般的方程和更一般的区域，这个事实也是对的.

在三维均匀物体 D 中热传导的方程是

$$L[u] \equiv \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,y,z,t),$$

其中 $u=u(x,y,z,t)$ 是 D 中点 $P(x, y, z)$ 处时刻 t 的温度，而 f 是热的散失率. 与一维情况一样，作为四个变量的函数 u，它不可能在使

$$L[u] \equiv \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} > 0$$

的点上取局部最大值。

考虑到在最大值点上 $\Delta u \leqslant 0$ 而 $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ 即可推出这个事实. 我们希望把最大值原理推广到满足非严格的不等式

$$L[u] \geqslant 0$$

的函数 u 上去.

物理上感兴趣的最简单的三维问题是一个占有区域 D 的固定的有界均匀固体的传热问题. 我们假定问题从时刻 $t=0$ 开始，初始温度 $u(x,y,z,0)$ 是 (x,y,z) 的给定函数. 而且，在 D 的边

界 ∂D 上，在所有 $t \geqslant 0$ 的时刻温度也是给定的. 热流问题关心的是在 D 内所有的点 $P(x,y,z)$ 和所有 $t > 0$ 的时刻确定温度函数 $u(x,y,z,t)$.

在四维时空中感兴趣的区域是一个无限长的柱体 $D \times (0,\infty)$. 但是,与一维情形说过的同样的因果性原理允许我们在考虑问题时对区域进行限制. 在某固定的正时刻 T, D 内的温度分布是由 $0 \leqslant t \leqslant T$ 期间内产生的温度变化确定的. 因此,要考虑的四维区域自然就是有限长柱体 $D \times (0,T]$. 这个柱体中的温度 u 是由 $L[u]$, $t=0$ 时 D 内的 u 值,以及柱壁 $\partial D \times (0,T]$ 上的 u 值来决定的.

用 E 表示柱体 $D \times (0,T]$. 我们预期最大值原理将断言 u 在 E 的边界部分: 即或在 E 的下底或在 E 的侧面 $\partial D \times [0,T]$ 上取到它的最大值(见图 3). 实际上,如果

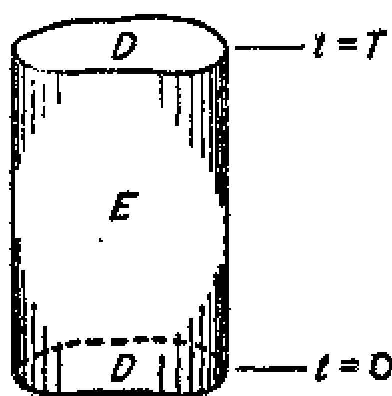


图 3

$$L[u] \equiv \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} > 0,$$

那么，我们早已知道最大值不可能在 E 的内点处达到. 如果 u 的最大值当 $t=T$ 时在 D 的一个内点达到，我们也将得出矛盾. 为看出这一点，我们注意到在这个最大值点处 $\Delta u \leqslant 0$; 因此，不等式 $L[u] > 0$ 蕴涵在同一点有

$$\frac{\partial u}{\partial t} < 0.$$

于是 u 在一略早的时刻更大，所以最大值必然在 E 的侧面或 E 的下底上达到.

我们不仅要把这个最大值原理推广到 $L[u] \geqslant 0$ 的情形，而且还将把它推广到更一般的方程和区域上去.

习　题

1. 验证函数 $u(x,t) = (1/\sqrt{t})e^{-x^2/4t}$ 当 $t > 0$ 时是热传导方程 $u_{xx}-$

$Lu = 0$ 的解。证明对于固定的 $x \neq 0$，$\lim\limits_{t \to 0^+} u(x,t) = 0$，并证明 u 在 $(0,0)$ 的任一邻域中无界。

2．对 n 维热传导算子

$$L[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

证明与定理 1 相类似的定理。

第二节　一维抛物型算子

微分算子

$$L[u] \equiv a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

在点 (x,t) 被称为**抛物型的**，如果

$$a(x,t) > 0.$$

算子 L 在 x，t 平面的区域 D 中是**一致抛物型的**，如果有正数 μ 使得

$$a(x,t) \geqslant \mu$$

对 D 中所有的 (x,t) 成立。第一节中讨论过的一维热算子在整个 x，t 平面中是一致抛物型的，因为在(1)中取 $a(x,t) = 1$，$b(x,t) \equiv 0$ 即可。

设 E 是矩形区域

$$E: \{0 < x < A,\ 0 < t \leqslant T\}$$

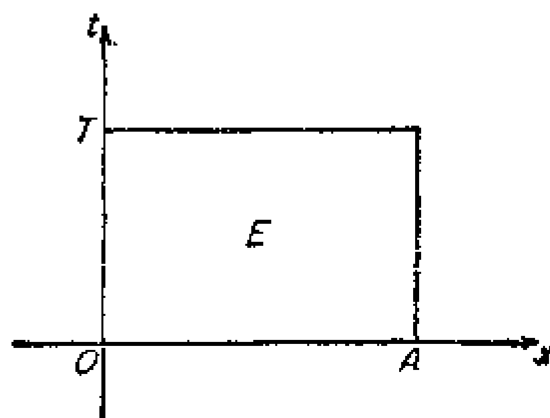


图 4

(见图 4)。显然，如果 u 在 E 中满足严格不等式

$$L[u] > 0. \tag{2}$$

那么 u 不可能在任一内点取到局部最大值. 因为在内部最大值点处 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leqslant 0$, 而 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$,破坏了(2). 而且, u 的最大值也不能在 E 的上边界: 开线段 $0<x<A$, $t=T$ 中达到. 为验证这一点,我们注意到在这样的最大值点上 $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0$ 以及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leqslant 0$ 即可.

于是对算子 L 的最大值原理就可以被推广到微分不等式 $L[u] \geqslant 0$ 的解上去. 我们介绍的证明是由 Nirenberg [1] 给出的,这个证明采用的是经过适当变化的 Hopf 用于椭圆型算子的那种方法. 在下一节中我们将会看到,容易把这个证明修改得适用于更一般的方程和区域. 基本的结果依赖于以下三个引理.

引理 1. 设 u 在 x, t 平面的区域 E 内满足微分不等式

$$L[u] \equiv a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0, \tag{3}$$

其中 a, b 有界, L 是一致抛物型的. 设 K 是一个圆, K 连同其边界 ∂K 都包含在 E 中. 假设 u 在 E 中的最大值是 M,在 K 的内部 $u<M$,而在 K 的边界上某点 P 处 $u=M$. 那么 K 在点 P 的切线必与 x 轴平行(即 P 或是 K 的最高点或是 K 的最低点).

证明. 设圆 K 以 $(\bar{x},\bar{t})$ 为中心, R 是 K 的半径. 我们假设 ∂K 上的 P 不是最高或最低点,从而推出矛盾.

不失一般性,我们可设 P 是使 $u=M$ 的唯一边界点. 因为,如果不是这样,我们可用稍小的圆 K' 代替 K, K' 的边界除点 P 外全在 K 的内部, 而 $\partial K'$ 与 ∂K 在点 P 相切. 于是 K' 恰好只有一个边界点 P 使 $u=M$,如果必要,论证可对 K' 进行.

假定 P 的坐标是 (x_1, t_1) 而 $x_1 \neq \bar{x}$ (图 5). 我们以 P 为中心,足够小的 R_1 为半径作圆 K_1,使

$$R_1 < |x_1 - \bar{x}|$$

且使 K_1 全在 E 内. 边界 ∂K_1 由两段弧组成: C'(包含端点)是 ∂K_1 和闭圆 $K \cup \partial K$ 的交集, C'' 是 C' 关于 ∂K_1 的余集(图 5). 因为在闭弧 C' 上 $u < M$,从而可找到正常数 η 使

$$u \leqslant M - \eta \quad \text{在 } C' \text{ 上}.$$

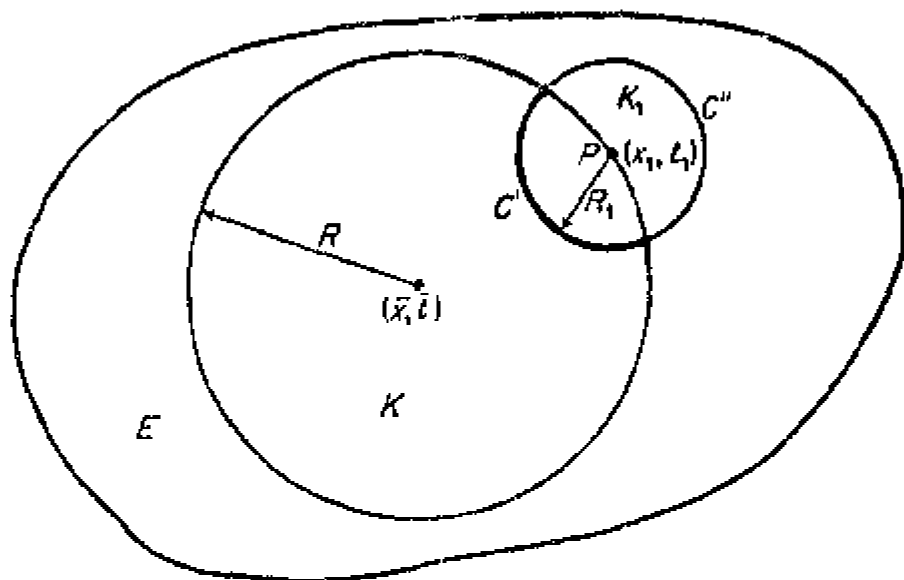


图 5

而且,因为在 E 上处处有 $u \leqslant M$,所以在 C'' 上

$$u \leqslant M.$$

我们定义辅助函数

$$v(x,t) = e^{-\alpha[(x-\bar{x})^2+(t-\bar{t})^2]} - e^{-\alpha R^2}.$$

于是,对正数 α, v 在 K 内为正,在 ∂K 上为零,在 K 外为负. 计算得到

$$L[v] = 2\alpha e^{-\alpha[(x-\bar{x})^2+(t-\bar{t})^2]}[2\alpha a(x_1 - \bar{x})^2 - a - b(x - \bar{x}) + (t - \bar{t})].$$

在圆 K_1 中及其边界上,我们有 $|x - \bar{x}| \geqslant |x_1 - \bar{x}| - R_1 > 0$,因而可选取 α 充分大使得对 $K_1 \cup \partial K_1$ 中所有的 (x,t)

$$L[v] > 0.$$

现在作函数

$$w(x,t) = u(x,t) + \varepsilon v(x,t),$$

其中 ε 是要选择的正常数. 注意在 K_1 中

$$L[w] = L[u] + \varepsilon L[v] > 0. \qquad (4)$$

因为在 C' 上 $u \leqslant M - \eta$，我们可选 ε 足够小使得

$$w = u + \varepsilon v < M \quad \text{在 } C' \text{ 上}.$$

而且，因为在 C'' 上 $v < 0$ 及 $u \leqslant M$，我们又有

$$w = u + \varepsilon v < M \quad \text{在 } C'' \text{ 上}.$$

因此，在整条边界 $\partial K_1 = C' \cup C''$ 上 $w < M$。另一方面，由于在 ∂K 上 v 变成零，我们得到

$$w(x_1, t_1) = u(x_1, t_1) + \varepsilon v(x_1, t_1) = u(x_1, t_1) = M.$$

所以 w 在 K_1 的最大值必在内点达到，这个事实与(4)矛盾，引理得证。注意，如果 P 是 K 的最高或最低点，上述论证失效。因为若 $x_1 = \bar{x}$，我们就不能选 $R_1 < |x_1 - \bar{x}|$。

附注. 下述事实是本质的：不等式 $u \leqslant M$ 在包含 $K \cup \partial K$ 的一个区域 E 中成立，从而它在有一部分在 ∂K 之外的圆 $K_1 \cup \partial K_1$ 上也成立。例如：函数 $u = x^2 + (t-2)^2$ 当 $t \leqslant 4$ 时满足 $u_{xx} - u_t \geqslant 0$，并且在圆 $x^2 + (t-2)^2 < 1$ 中 $u < 1$，但是它在边界 $x^2 + (t-2)^2 = 1$ 上处处取最大值。因为在这个圆外 $u > 1$，所以不能应用引理 1。定理 3 表明只需要不等式(3)在圆 K 中成立。

引理 2. 假设在 x, t 平面的区域 E 中 u 满足不等式 $L[u] \geqslant 0$，L 与引理 1 中相同。又设在 E 的某内点 (x_0, t_0) 上 $u < M$，而在 E 处处 $u \leqslant M$。如果 l 是 E 中包含 (x_0, t_0) 的任何水平线段，则在 l 上 $u < M$(图 6)。

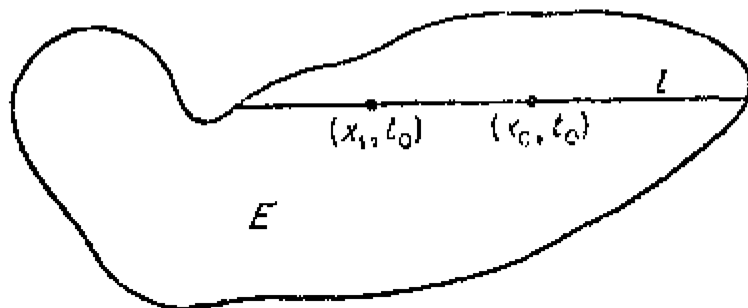


图 6

证明. 我们假设在 l 的某内点(x_1,t_0)处 $u=M$,而在(x_0,t_0) $u<M$,这样将导致矛盾. 为方便起见,我们设 $x_1<x_0$, 如果必要,可将 x_1 向右移动, 使得当 $x_1<x\leqslant x_0$ 时 $u<M$成立. 设 d_0 是 x_0-x_1 与线段 $x_1\leqslant x\leqslant x_0$, $t=t_0$ 上任一点到 ∂E 的距离的最小值中的较小者.

对 $x_1<x<x_1+d_0$ 我们定义 $d(x)$ 是从 (x,t_0) 到 E 中使 $u=M$的最近点的距离. 因为 $u(x_1,t_0)=M$, 于是 $d(x)\leqslant x-x_1$. 由引理 1,这个最近点将在 (x,t_0) 的正上方或正下方,即 $u(x,t_0+d(x))=M$ 或 $u(x,t_0-d(x))=M$. 因为从点 $(x+\delta,t_0)$ 到 $(x,t_0\pm d(x))$ 的距离是$\sqrt{d(x)^2+\delta^2}$,我们就得到

$$d(x+\delta)\leqslant\sqrt{d(x)^2+\delta^2}<d(x)+\frac{\delta^2}{2d(x)},\tag{5}$$

用 $x+\delta$ 代替 x,用$-\delta$ 代替 δ,我们还有

$$d(x+\delta)>\sqrt{d(x)^2-\delta^2}.\tag{6}$$

现设 $d(x)>0$,并选取 $0<\delta<d(x)$. 我们把区间 $(x,x+\delta)$ 分成 n 等分,应用不等式(5)和(6)可求得

$$d\left(x+\frac{j+1}{n}\delta\right)-d\left(x+\frac{j}{n}\delta\right)\leqslant\frac{\delta^2}{2n^2d(x+(j/n)\delta)}$$

$$\leqslant\frac{\delta^2}{2n^2\sqrt{d(x)^2-\delta^2}},$$

$$j=0,1,\cdots,\quad n-1,$$

对任何整数 n 从 $j=0$ 到 $n-1$ 求和,给出

$$d(x+\delta)-d(x)\leqslant\frac{\delta^2}{2n\sqrt{d(x)^2-\delta^2}}.$$

令 $n\to\infty$,我们对 $\delta>0$ 得到

$$d(x+\delta)\leqslant d(x).$$

换句话说,$d(x)$ 是 x 的非增函数. 因为$d(x)\leqslant x-x_1$, 对于充分接近 x_1 的 x 它可以充分小,所以我们得出当 $x_1<x<x_1+d_0$ 时 $d(x)\equiv0$. 换言之,在这个区间上 $u(x,t_0)\equiv M$, 与我们的假设:

当 $x_1 < x \leqslant x_0$ 时 $u < M$，矛盾．因此，我们已经得到 $u(x_0, t_0) < M$ 与 $u(x_1, t_0) = M$ 的矛盾．

附注． 引理 2 说明，如果有一个单个的内点使 $u = M$，那么在包含该点且位于 E 内的最长水平线段上 $u = M$．

引理 3． 假设在 x, t 平面的区域 E 中 u 满足不等式 $L[u] \geqslant 0$，L 与引理 1 中相同．又设对某两个固定的数 t_0，t_1，在位于带形 $t_0 < t < t_1$ 中 E 的部分中 $u < M$，则在直线 $t = t_1$ 的包含于 E 内的部分上 $u < M$．

证明． 设 $P(x_1, t_1)$ 是直线 $t = t_1$ 上使 $u = M$ 的一点，我们将导致矛盾．

作中心在点 P 的半径如此之小的圆 K，使 K 的下半圆全在 E 的 $t > t_0$ 的部分中(见图 7)．

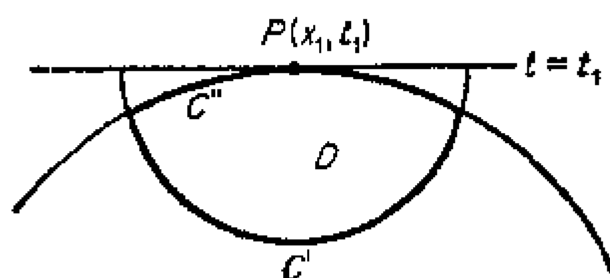


图 7

现在我们定义函数

$$v(x, t) = e^{-[(x-x_1)^2+\alpha(t-t_1)]} - 1.$$

简单的计算表明

$$L[v] = e^{-[(x-x_1)^2+\alpha(t-t_1)]}[4a(x-x_1)^2 - 2a - 2b(x-x_1) + \alpha].$$

选取 α 充分大使得在 K 中当 $t \leqslant t_1$ 时

$$L[v] > 0.$$

抛物线

$$(x - x_1)^2 + \alpha(t - t_1) = 0 \tag{7}$$

与直线 $t = t_1$ 相切于 P．我们用 C' 表示 ∂K 在抛物线(7)下面(包

含端点)的部分，用 C'' 表示位于K内的抛物线段(图 7)。把由 C' 和C'' 围成的区域称为 D．根据假设，在闭弧 C' 上 $u < M$，所以存在 $\eta > 0$ 使得在 C' 上

$$u \leqslant M - \eta.$$

我们作函数

$$w(x,t) = u(x,t) + \varepsilon v(x,t),$$

其中 ε 是待选的正常数．注意在 C'' 上 $v = 0$，因而可选取 ε 如此之小使得 w 具有如下性质:

(i) 在D中 $\quad L[w] = L[u] + \varepsilon L[v] > 0$,

(ii) 在 C' 上 $\quad w = u + \varepsilon v < M$,

(iii) 在 C'' 上 $\quad w = u + \varepsilon v \leqslant M$.

条件(i)表明w不能在D中达到它的最大值；因而w的最大值是M并在点 P 达到．我们得出在点 P

$$\frac{\partial w}{\partial t} \geqslant 0. \tag{8}$$

简单的计算表明在点 P

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\alpha < 0, \tag{9}$$

因此，我们从(8)和(9)就得到在点 P

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geqslant -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} > 0. \tag{10}$$

另一方面，由于在 $t = t_1$ 上 u 的最大值在点 P 达到，所以在点 P

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leqslant 0.$$

这些不等式与假设 $L[u] \geqslant 0$ 矛盾，从而引理得证。

基于以上的引理，我们现在可以证实下述结论。

定理 2. 假设在 x, t 平面的区域 E 中，不等式

$$L[u] \equiv a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0$$

成立，其中 a 和 b 有界，L 在 E 中是一致抛物型的．如果 u 的最大

值M在E的任一内点(x_1,t_1)达到，那么，在E中每一包含点(x_1,t_0)的，并具有性质：使垂直线段 $x=x_1$，$t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 全在E中的线段$t=t_0$上 $u\equiv M$.

证明. 假设存在一个t值，例如$t_0<t_1$，使$u(x_1,t_0)<M$. 令τ是使 $u(x_1,t)<M$ 的$t<t_1$的最小上界. 由连续性 $u(x_1,\tau)=M$，而在某区间 $\tau_1<t<\tau$ 中 $u(x_1,t)<M$. 应用引理2和3，我们就得到了矛盾.

附注. (i)(3)的不恒为常数的解有可能在区域E中达到它的最大值. 例如，在杆的热流问题中，如果杆的初温恒等于M，并在端点上直到时刻$t=t_1$保持这个温度，就确实会出现这种情况. 如果杆的端点温度下降了，那么往后解就不再是常数了. 注意这并不违背定理2的结论. 就这一点而言，这里的最大值原理与椭圆型方程的最大值原理有着十分不同的形式.

(ii) 从引理3的证明我们看出，如果点(x_1,t_1)位于水平线段S上，而S是E的边界的一部分，那么，只要u，$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$和$\frac{\partial u}{\partial t}$全都在$E\cup S$上连续，定理2仍然成立.

(iii) 把定理2和引理2结合起来就可以决定达到内部最大值的解必等于常数的整个区域. 一旦我们得到一点Q，它使$u=M$（最大值），我们知道在包含Q的E中的最长水平线段上 $u\equiv M$，然后，定理2表明E中在该线段下方的所有点上必有 $u\equiv M$. 引理2表明在每条包含这种点的水平线段上 $u\equiv M$. 如果E中的点P能够用仅由E中的水平和"指向上方"的垂直线段构成的路径与点Q相连接，那么 $u(P)=M$（图8）. 在图8中用水平阴影标出了如果在点Q上 $u=M$，则u必取值为M的E的那一部分. 图8中标有 A, B, C的部分在E之外.

(iv) 因为所有的引理仅涉及内点的邻域，所以假设在E的每一闭子集中a, b有界和L是一致抛物型的就够了.

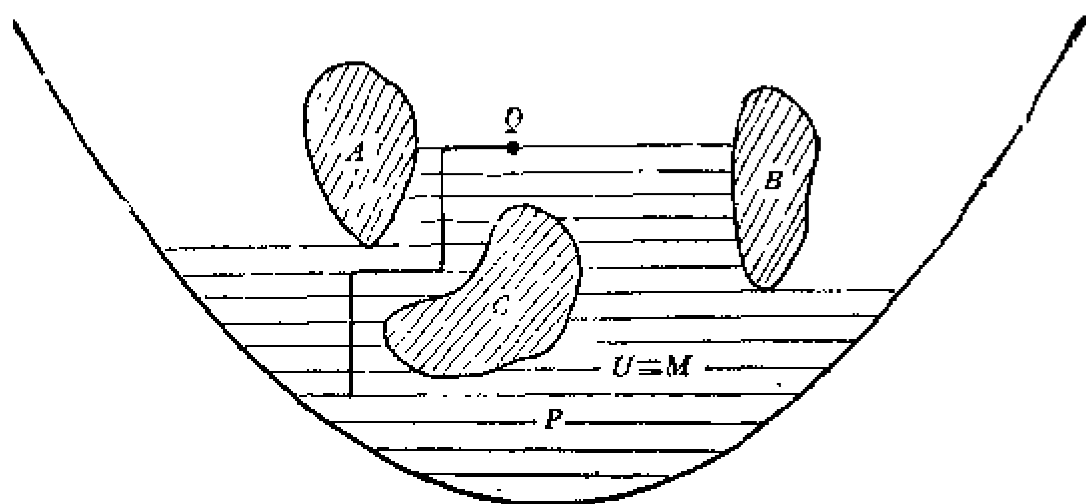


图 8

我们刚才已经知道抛物型不等式 $L[u]\geqslant 0$ 的非常数解 u 只能在边界的某一部分上达到最大值．在研究椭圆型不等式时我们得到过在最大值点上边界的法向导数决不为零（第二章第七节）．这个重要的事实在很多应用中，特别是在证明椭圆型方程解的唯一性定理时被用到．

在某些条件下，抛物型不等式的解 u 也有这样的性质：在（边界上）达到最大值处它沿边界的法向导数不能为零．在下述定理中将给出这个结果的精确叙述，和椭圆型不等式的类似定理一样，它也有许多的应用．

定理 3. 设 E 是 x, t 平面的一个区域，u 是一致抛物型不等式

$$L[u]\equiv a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial t}\geqslant 0$$

在 E 中的一个解，其中 a 和 b 有界．假设 P 是边界 ∂E 上的一点，u 在点 P 达到最大值，∂E 在 P 的法向不平行于 t 轴．而且，假设在点 P 能作全在 E 中的 ∂E 的内切圆，并使 $u<M$ 在该圆内成立．若用 $\partial/\partial\nu$ 表示 E 的任一外方向导数，则在点 P

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}>0.$$

证明． 我们象上面引理 1 那样来进行证明．作半径为 R 的圆

K 在点 P 与 ∂E 相切(图 9). 用 (x_0, t_0) 表示 P 的坐标, 用 (x_1, t_1)

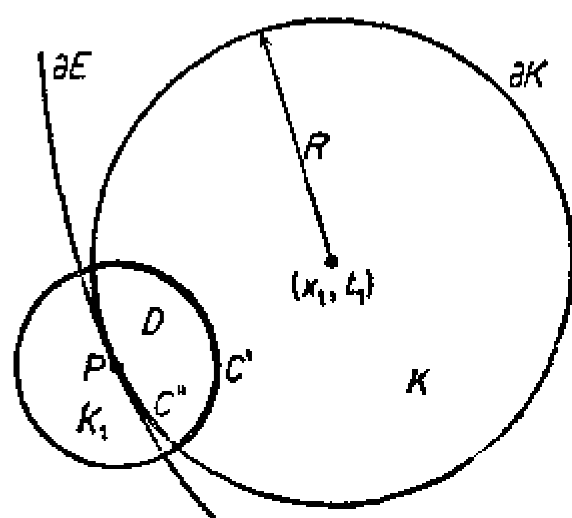


图 9

表示K的中心. 再作以 P 为中心的圆 K_1, 其半径$<|x_1 - x_0|$. 我们把边界 ∂K_1 包含在K中的部分称为 C',把 C' 的端点加到 C' 上去,所以 C' 是闭弧. 用 C'' 表示∂K 在 K_1 中的(开)弧, 我们注意到弧 $C' \cup C''$ 构成了如图 9 所示的透镜形区域D的边界. 如果必要, 通过选取稍小的内切圆 ∂K, 我们可使 ∂K 上除点 P 外到处有 $u < M$. 于是在闭弧 C' 上 $u < M$,从而我们能够断言以下三个事实:

(i) 在 C'' 上除 P 外 $u < M$,

(ii) 在点 P $u = M$,

(iii) 存在充分小的 $\eta > 0$,使得在 C' 上

$$u \leqslant M - \eta.$$

现在我们引进辅助函数

$$v(x,t) = e^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]} - e^{-\alpha R^2}$$

并注意到

$$L[v] = 2\alpha e^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]}[2\alpha a(x-x_1)^2 - a - b(x-x_1) + (t-t_1)].$$

因此,当 α 充分大时,对 $D \cup \partial D$ 上的 (x,t) 我们有

$$L[v] > 0.$$

我们作函数

$$w = u + \varepsilon v,$$

注意对每一正数 ε，在 D 中 $L[w] = L[u] + \varepsilon L[v] > 0$. 因为上面的(iii)，我们可选取 ε 如此之小，使在 C' 上

$$w < M$$

成立. 由于在 ∂K 上 $v = 0$，因为上面的(i)，在 C'' 上除点 P 外我们有

$$w < M$$

而

$$w(P) = M.$$

我们只考虑区域 D，应用最大值原理可得出 w 在 $D \cup \partial D$ 上的最大值仅在点 P 出现. 因此在点 P

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} \geqslant 0.$$

但是，计算表明

$$\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{n} \frac{\partial v}{\partial r} = -2\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{n} \alpha R e^{-\alpha R^2} < 0.$$

我们得到了在点 P 处 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} > 0$，定理证完.

附注. 如果 ∂E 的法向在最大值点处与 t 轴平行，定理 3 的结论可不成立. 抛物型不等式的解 u 可以有 u 是常数的区域，这样一个区域的边界垂直于 t 方向，又因 u 连续可微，沿着使 $u =$ 常数的区域的整个边界它将有零法向导数. 例如，若 u 的最大值在图 10 所示的阴影区域的每一点上达到，那么沿整条线 l，$\frac{\partial u}{\partial t}$ 将是零. 现在限制在由直线 l 上方的点构成的区域

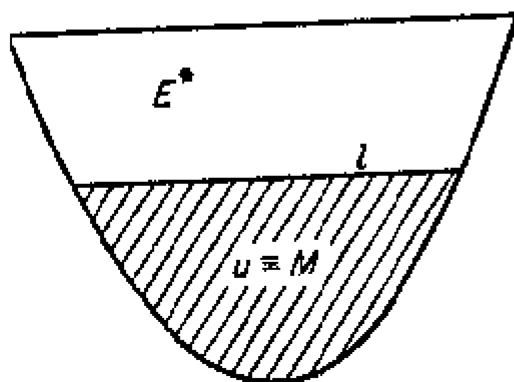


图 10

E^* 中的解 u 沿 l 将达到其最大值而且在那里法向导数为零.

现在我们来考虑形如

$$(L+h)[u] \geqslant 0$$

的不等式的最大值原理,其中 L 是一致抛物型的, h 是 x 和 t 的给定函数. 下面的结果类似于第二章的定理 6 和定理 8.

定理 4. 设定理 2 的假设在区域 E 中成立,并且在 E 中 $h \leqslant 0$. 如果 u 的最大值 M 在一内点 (x_1, t_1) 达到,又若 $M \geqslant 0$, 那么,在位于 E 中包含点 (x_1, t_1) 的水平线段正下方的所有 E 中 $t=$ 常数的线段上 $u \equiv M$. 如果在边界点 P 上达到非负最大值,则定理 3 的结论在点 P 成立.

证明. 我们完全遵循定理 2,3 的证明中所用的方法. 在几个引理中,取辅助函数中的参数 α 如此之大使得 $(L+h)[u] > 0$, 因为 $h \leqslant 0$,我们得到在 w 的非负最大值点上 $(L+h)[w] \leqslant 0$. 推导的其余部分与定理 2 和 3 中完全一样.

如果最小值 m 非正,对于 $(L+h)[u] \leqslant 0$ 的解有一个相应的最小值原理. 把定理 4 应用于 $(-u)$ 即可推出这个结论.

习　　题

1. 如果在第 192 页引理 1 的假设中用任一凸区域代替圆 K,试证明引理的结论仍然成立.

2. 函数 $u(x,t) = -(x^2 + 2xt)$ 是方程 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ 的解. 在 D: $-1 < x < 1$, $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$ 中最大值原理成立吗? 说明理由.

3. 证明下述问题的解 u 是唯一的

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t), \text{ 在 } D: \{0 < x < a,\ 0 < t < T\} \text{ 中},$$

$$u(x,0) = g_1(x),\quad 0 < x < a,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g_2(t),\quad 0 \leqslant t \leqslant T,\quad x = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g_3(t),\quad 0 \leqslant t \leqslant T,\quad x = a,$$

其中 g_1, g_2 和 g_3 是给定函数.

第三节　一般抛物型算子

算子

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t}$$

在 $(\boldsymbol{x}, t) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ 被称为抛物型的, 如果对固定的 t, 由第一个和号构成的算子在 $(\boldsymbol{x}, t)$ 是椭圆型的. 即如果存在数 $\mu > 0$ 使得

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}, t)\xi_i\xi_j \geqslant \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \tag{1}$$

对所有的 n 重实数组 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 成立, 则 L 是抛物型的. 算子 L 在 $(\boldsymbol{x}, t)$ 空间中一个区域 E 中是一致抛物型的, 如果对 E 中所有的 $(\boldsymbol{x}, t)$, (1) 对于同一常数 $\mu > 0$ 成立.

第二节的结果可以完全直接地推广到一致抛物型算子上去.

定理 5. 设 u 在 $(n+1)$ 维空间 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ 的区域 E 中满足一致抛物型微分不等式

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0, \tag{2}$$

又设 L 的系数有界. 假设 u 在 E 中的最大值是 M, u 在某一内点 $P(\boldsymbol{x}, \bar{t})$ 达到该最大值. 用 $E(\bar{t})$ 表示超平面 $t = \bar{t}$ 与 E 的交集中包含点 P 的连通部分. 那么在 $E(\bar{t})$ 中 $u \equiv M$. 而且, 如果 Q 是 E 中能够只用由全在 E 中的水平线段及指向上方的垂直线段构成的路径与点 P 相连接的点, 则在点 Q 处 $u = M$.

证明. 用与定理 2 完全相同的方法就能推出这里的结论. 因为算子 L 中的第一项是 n 维空间中的一个椭圆型算子, 通过坐标变换可把算子的这一部分在单个点处化为 Laplace 算子 (第二章定理 4). 由此立即推出 $L[u] > 0$ 的解不可能在内点取最大值.

为把这个结论推广到 $L[u] \geqslant 0$ 的解，我们来证明与第二节中引理 1,2,3 相类似的一些结果．用

$$v(\boldsymbol{x},t)=e^{-\alpha\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_i)^2+(t-\bar{t})^2\right]}-e^{-\alpha R^2}$$

代替引理 1 证明中的辅助函数．相应于引理 3 中的辅助函数是

$$v(\boldsymbol{x},t)=e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_i)^2-\alpha(t-\bar{t})}-1.$$

我们用 $(n+1)$ 维球代替圆，用超抛物面

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_i)^2+\alpha(t-\bar{t})=0$$

来代替第二节中的抛物线(7)．证明的其余细节留给读者．

附注． 如果点 $P(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{t})$ 在 E 的边界 ∂E 的水平连通部分 $E(\bar{t})$ 上，那么只要 u 及导数 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 都在 $E\cup E(\bar{t})$ 上连续，定理 5 仍然成立．

下一个定理是定理 3 在 $(n+1)$ 维情形的直接推广．

定理 6． 设 u 在区域 E 中满足带有有界系数的一致抛物型不等式(2)，又设 u 在边界 ∂E 上的一点 P 达到最大值 M．假设能够作一个通过点 P 的完全落在 E 中的球，且在球内 $u<M$．还假设从球心到 P 的半径方向不平行于 t 轴．如果 $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ 表示沿任一外方向的方向导数，则在点 P 有

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}>0.$$

与定理 4 中一样，当 $M\geqslant 0$ 时我们可以把定理 5 和 6 的证明用于微分不等式 $(L+h)[u]\geqslant 0\ (h\leqslant 0)$ 的解．于是我们得到以下的定理

定理 7． 如果 u 是 $(L+h)[u]\geqslant 0$ 的解，只要 $h\leqslant 0$ 及 M

$\geqslant 0$，则定理 5 和 6 的结论仍然成立。

附注. (i)如果 $u(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}$ 空间的区域 D 中满足椭圆型不等式

$$(L+h)[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + h(\boldsymbol{x})u \geqslant 0, \quad h \leqslant 0,$$

显然它也在 $(\boldsymbol{x}, t)$ 空间的集合 $D \times (0, T]$ 中满足抛物型不等式

$$L[u] - \frac{\partial u}{\partial t} + hu \geqslant 0.$$

若 u 在 D 的一个内点 $\boldsymbol{x}_0$ 或 ∂D 上达到最大值 M，则它在 $D \times (0, T]$ 中的点 $\left(\boldsymbol{x}_0, \frac{1}{2}T\right)$ 或 $\partial D \times (0, T]$ 上也达到这个最大值。所以定理 5,6,7 蕴涵着关于椭圆型不等式的相应的最大值原理.

(ii) 通过变量替换 $v = ue^{-\lambda t}$ 可用不等式 $(L+h-\lambda)[v] \geqslant 0$ 代替不等式 $(L+h)[u] \geqslant 0$. 如果 h 上有界，我们可选取 λ 足够大使 $h-\lambda \leqslant 0$，所以可以对 v 应用最大值原理. 特别地，由此推出不需限制 $h \leqslant 0$，当 $M = 0$ 时的定理 7 也成立。

定理 6 是由 A. Friedman [1,3,4] 首先证明的。

习　　题

1. 详细证明定理 5.
2. 详细证明定理 6.

第四节　边值问题的唯一性定理

设 E 是 x, t 平面上由不等式

$$c < x < d, \quad 0 < t < T$$

确定的矩形区域. (见图 11.) 我们提出如下问题：确定函数 $v(x,t)$ 使它在 E 中满足一致抛物型方程

$$a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial t}=f(x,t) \tag{1}$$

以及边界条件

$$\left.\begin{aligned}v(x,0)&=g_1(x),\ c\leqslant x\leqslant d,\\ v(c,t)&=g_2(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,\\ v(d,t)&=g_3(t),\ 0\leqslant t\leqslant T.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

函数 f 在整个 E 上给定，而函数 $g_i, i=1,2,3$ 在它们各自的定义域上给定。

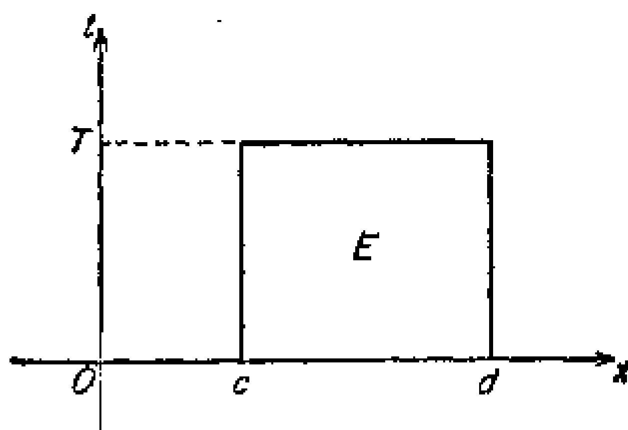


图 11

和椭圆型方程的情况一样，我们将不研究为保证解 $v(x,t)$ 的存在性而应加在方程(1)的系数和边界条件(2)上的那些条件，但是，我们将要证明只须借助最大值原理就可以建立解的唯一性。也就是说，我们将证明**方程(1)满足边界条件(2)的解至多只有一个**。

为证实这个结果，我们假设 v_1 和 v_2 是满足带有同样的 f 和 $g_i, i=1,2,3$ 的(1)和(2)的两个函数。我们定义

$$u=v_1-v_2,$$

并注意到在 E 中

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

以及

$$u(x,0)=0,\ c\leqslant x\leqslant d,$$

$$u(c,t) = u(d,t) = 0, \ 0 \leqslant t < T.$$

按照定理 2 中所讲的最大值原理，u 不能在 E 中有正的最大值，所以处处有 $u \leqslant 0$．对$(-u)$应用相同的论证，我们得到在 E 中 $u \geqslant 0$．因此在 E 中

$$u = v_1 - v_2 = 0.$$

刚才对一维情况建立的结果现在将被推广到一般抛物型方程的更一般的边界条件的解上去．

我们考虑 n 维欧氏空间中的有界区域 D 和 t 轴上的区间 $[0, T]$．设 E 表示 $(n+1)$ 维区域 $D \times (0,T)$． 我们用 Γ 来表示由 $\partial D \times (0,T)$ 构成的 E 的部分边界．

定理 8. 设 u 是一致抛物型方程

$$(L+h)[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x},t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x},t) \frac{\partial u}{\partial x_i}$$
$$+ h(\boldsymbol{x},t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(\boldsymbol{x},t) \tag{3}$$

在 E 中的解，又设 L 的系数有界．假设 $u(\boldsymbol{x}, t) \equiv u(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ 在 D 中满足初始条件

$$u(\boldsymbol{x},0) = g_1(\boldsymbol{x}), \tag{4}$$

在 Γ 的所有点 $(\boldsymbol{x},t)$ 上满足边界条件

$$\alpha(\boldsymbol{x},t)u(\boldsymbol{x},t) + \beta(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g_2(\boldsymbol{x},t), \tag{5}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ 是沿 Γ 的任一向外方向上的方向导数．假设在 Γ 上 $\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0$ 且 $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ 在每点成立，又设 $h(\boldsymbol{x},t)$ 上有界．如果 v 是(3)的满足相同初始条件(4)和边界条件(5)的另一个解，则在 E 中 $v \equiv u$．

证明. 这个结论可作为最大值原理的一个简单应用而推出．我们定义

$$w = u - v.$$

于是 w 满足

$$(L+h)[w]=0$$

以及初始和边界条件

$$\left.\begin{aligned} w(\boldsymbol{x},0)=0 \quad & 在 D 中, \\ \alpha w+\beta \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}=0 \quad & 在 \Gamma 上, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

由第三节末尾的附注(ii)，不失一般性，我们可设 $h(\boldsymbol{x},t)\leqslant 0$。按照定理 7，$w$ 的非负最大值必将在 $t=0$ 或 Γ 上达到。如果 w 的最大值为正，则它必出现在 Γ 上。但是定理 7 断言在这样的最大值点上 $\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}>0$，因为 α 和 β 不能同时为零，所以在最大值点上破坏了条件

$$\alpha w+\beta \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}=0.$$

因此，$w\leqslant 0$ 在 E 到处成立。对 $(-w)$ 应用同样的推理，我们得到 $w\geqslant 0$。因此在 E 中 $w=u-v\equiv 0$。

附注. (i) 注意如果 $\alpha\equiv 1,\beta\equiv 0$，那么问题(3)，(4)，(5)就是矩形上一维边值问题的直接推广。

(ii) 对于更一般的区域 E 定理 8 也成立。特别是区域 D 可随时间 t 移动，只要它的边界点的移动速度有限即可。

(iii) 解的唯一性与 h 的符号无关这一事实与椭圆型方程边值问题的唯一性问题形成了明显的对比，在后者可能会出现特征值问题。

习 题

1. 证明问题

$$u_{xx}-tu_t+2u=0$$
$$u(x,0)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant \pi$$
$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t\geqslant 0$$

对所有的常数 a 有解 $u=at\sin x$。为什么不能应用唯一性定理？

2. 证明(平面极坐标系中的)问题

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}-u_t=0,\ 0<r<1,\ t>0$$

$$u(r,\theta,0)=0,\quad 0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

$$u_\theta(1,\theta,t)=0,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad t>0$$

有一个以上的解．为什么不能应用定理 8?

第五节 三曲线定理

对于满足抛物型不等式的函数，没有与次调和函数的 Hadamard 三圆周定理(第二章第十二节)完全一样的定理．但是，借助最大值原理却能够得到一个与 Hadamard 不等式类似的三曲线定理．这里给出的结果有许多应用，作为一个例子，我们用它来证实热方程初值问题解的唯一性．

设 t_0 是一个固定的正常数，考虑单参数的抛物线族

$$\frac{x^2}{t_0-t}=\rho,$$

其中常数 ρ 取遍所有的正值(见图 12)．除 t 轴上的点外，带形区域 $\{0<t<t_0,\ -\infty<x<\infty\}$ 中每一点恰好落在这族曲线中的某一条之上．

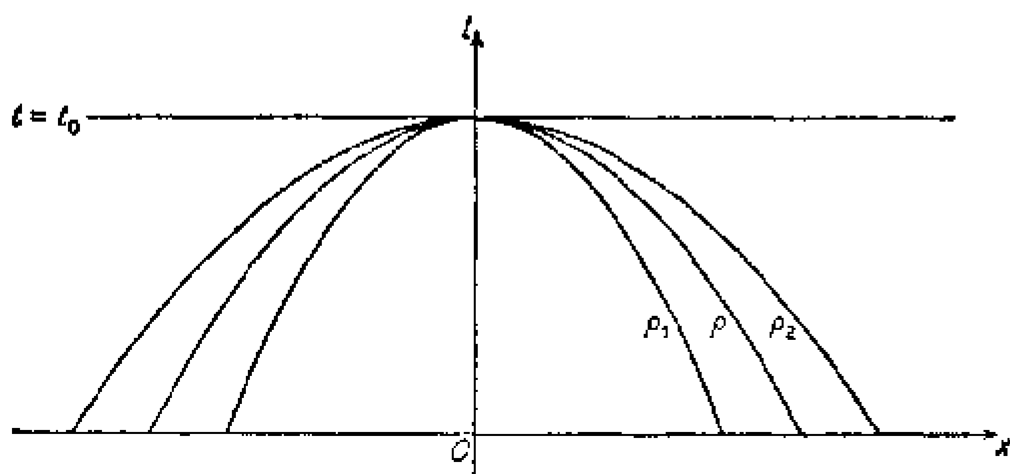


图 12

我们可把 ρ 看成 x 和 t 的函数，计算给出

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{2(t_0-t)-x^2}{(t_0-t)^2}.$$

我们要寻求仅依赖于 ρ 的函数 $\sigma(\rho)$，使它是热方程的解。为确定 σ，我们记

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}-\frac{\partial\sigma}{\partial t}\equiv\sigma''(\rho)\rho_x^2+\sigma'(\rho)(\rho_{xx}-\rho_t).$$

因此 σ 必满足

$$\frac{\sigma''}{\sigma'}=-\frac{\rho_{xx}-\rho_t}{\rho_x^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\rho},$$

积分上式得

$$\log\sigma'=\frac{1}{4}\rho-\frac{1}{2}\log\rho.$$

所以

$$\sigma'=\frac{1}{\sqrt{\rho}}e^{\rho/4},$$

再积分一次就给出了

$$\sigma(\rho)=\int_0^\rho\frac{1}{\sqrt{\rho_1}}e^{\rho_1/4}d\rho_1. \tag{1}$$

由(1)给出的函数 $\sigma(\rho)$ 当 $t<t_0$ 时满足热方程。

我们考虑函数 $u(x,t)$，它在下面将要描述的区域 D 中满足

$$u_{xx}-u_t\geqslant 0,$$

D 的下方由直线 $t=0$ 围住，上方由直线 $t=\bar{t}$，$\bar{t}<t_0$ 围住；D 的两侧由抛物线 $\rho=\rho_1$ 及 $\rho=\rho_2$ 位于第一象限的弧段围住(见图13)。对于 $\rho_1\leqslant\rho\leqslant\rho_2$ 我们定义函数

$$M_1(\rho)=\max_{\substack{x^2=\rho(t_0-t)\\0\leqslant t\leqslant\bar{t}}}u(x,t),\quad M_2=\max_{\sqrt{\rho_1t_0}\leqslant x\leqslant\sqrt{\rho_2t_0}}u(x,0),$$

及

$$M(\rho)=\max(M_1(\rho),M_2).$$

函数

$$\varphi(\rho)=a+b\sigma(\rho)$$

满足热方程，现在按关系式

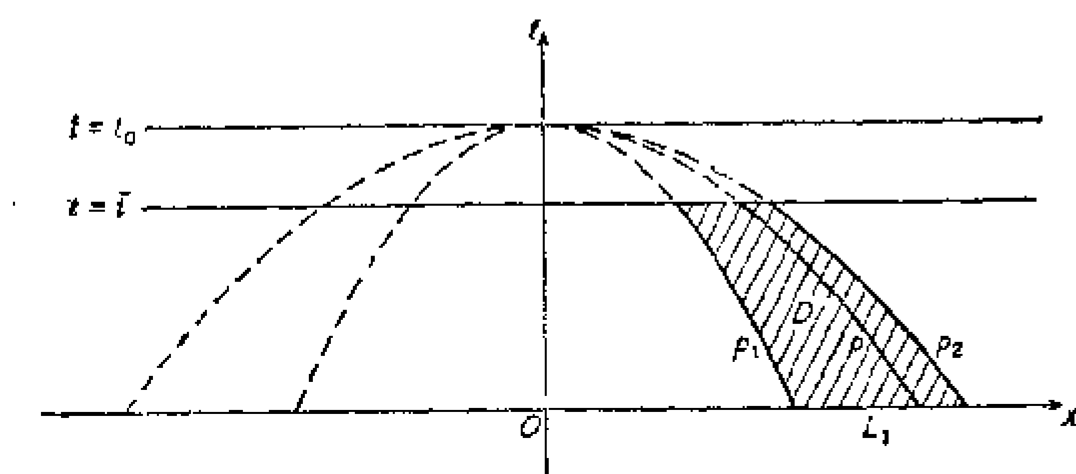


图 13

$$a + b\sigma(\rho_1) = M(\rho_1),$$
$$a + b\sigma(\rho_2) = M(\rho_2)$$

决定 a 和 b，于是我们求得

$$\varphi(\rho) = \frac{M(\rho_1)[\sigma(\rho_2) - \sigma(\rho)] + M(\rho_2)[\sigma(\rho) - \sigma(\rho_1)]}{\sigma(\rho_2) - \sigma(\rho_1)}.$$

函数

$$v = u - \varphi(\rho)$$

在 D 中满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0.$$

而且，因为

$$u(x,0) \leqslant M_1$$

以及

$$u(x,t) \leqslant M(\rho_1) \quad 当 \quad x^2 = \rho_1(t_0 - t) \quad 时,$$
$$u(x,t) \leqslant M(\rho_2) \quad 当 \quad x^2 = \rho_2(t_0 - t) \quad 时,$$

我们得出在直线 $t = \bar{t}$ 下方的 D 的整条边界上 $v \leqslant 0$. 对 v 应用最大值原理，我们就推出公式

$$M(\rho) \leqslant \frac{M(\rho_1)[\sigma(\rho_2) - \sigma(\rho)] + M(\rho_2)[\sigma(\rho) - \rho(\rho_1)]}{\sigma(\rho_2) - \sigma(\rho_1)}. \tag{2}$$

即 $M(\rho)$ 是 $\sigma(\rho)$ 的凸函数。借助(2)可建立如下的唯一性结果，它是由 A. N. Tikhonov [1] 首先证明的。

定理 9. 设 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 都是 $u_{xx}-u_t=f(x,t)$ 在带形 D: $\{-\infty<x<\infty,\ 0<t<T\}$ 中的解，又设 u 和 v 在 $D\cup\partial D$ 上连续。如果 $u(x,0)=v(x,0)=g(x)$，其中 g 是给定函数，又若存在常数 A 和 c 使得

$$|u(x,t)|,|v(x,t)|\leqslant Ae^{cx^2} \tag{3}$$

对 $0\leqslant t\leqslant T$ 的 t 一致成立，那么在 D 中 $u(x,t)\equiv v(x,t)$。

证明. 我们利用凸性不等式(2)。选取 $t_0<1/4c$ 并在区域 D_1: $\{-\infty<x<\infty,\ 0\leqslant t\leqslant t_0/2\}$ 中考虑函数 $w(x,t)\doteq u(x,t)-v(x,t)$，于是 w 满足热方程且 $w(x,0)=0$。把不等式(2)应用于 w，并令 $\rho_2\to\infty$，由于 w 以 e^{cx^2} 的倍数为上、下界，而 $\sigma(\rho)$ 按 $e^{x^2/4t_0}$ 速度增长，我们得出当 $\rho_2\to\infty$ 时 $M(\rho_2)/\sigma(\rho_2)\to 0$，因而

$$M(\rho)\leqslant M(\rho_1).$$

令 $\rho_1\to 0$，我们就看出 w 在 $x=0$ 取到它在半带形 $\left\{x\geqslant 0,\ 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}t_0\right\}$ 上的最大值。对负的 x 作同样的论证，我们得到 w 在 $x=0$ 上取到它在 D_1 中的最大值。于是，由定理 2 这个最大值必是零，所以在整条带形中 $w\leqslant 0$。对 $(-w)$ 作同样论证，我们可得出在 D_1 中 $w\equiv 0$。再用直线 $t=\frac{1}{2}t_0$ 作初值线重复整个过程又可得出在 D_2: $\{-\infty<x<\infty,\ t_0/2\leqslant t\leqslant t_0\}$ 中 $w\equiv 0$。有限步后在 D 中我们就得到 $w\equiv 0$。

附注. (i) 对 n 维情形，我们可用同样的方法推导出象(2)那样的适用于满足 $\Delta u-u_t\geqslant 0$ 并在形如 $(x_1^2+\cdots+x_n^2)/(t_0-t)=\rho$ 的抛物面上取最大值的函数不等式。于是，我们可得出增长速度不超过 $Ae^{c(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}$ 的热方程解的唯一性定理。

(ii) 增长条件(3)是需要的．因为要是允许比(3)更快地增长，就能够找到若干解不唯一的例子．见 Tikhonov [1], Täcklind [1], Widder [1], Rosenbloom 和 Widder [1].

(iii) 和椭圆型方程的情形一样，能够得到适用于线性抛物型方程的一般的三曲面定理，对于满足定理 9 条件的抛物型方程也能够得到唯一性定理．但是，直接应用最大值原理也能够对于无界区域推出唯一性定理．同时也可建立抛物型方程的 Phragmèn-Lindelöf 原理，我们将在第六节中来展示这种方法．

习　题

1. 对关于抛物线族 $x^2+2t=\rho$ 满足 $u_{xx}-u_t\geq 0$ 的函数建立三抛物线定理．

2. 对关于超曲面族 $(x_1^2+\cdots+x_n^2)/(t_0-t)=\rho$ 满足 $\Delta u-u_t\geq 0$ 的函数建立"三抛物面"定理．

3. 对关于形如 $(\alpha x^2+\beta t)e^{\gamma x+\delta t}=\rho$ 的适当曲线族满足 $au_{xx}+bu_x-u_t\geq 0$ (a, b 是常数)的函数建立三抛物线定理．

4. 利用不等式(2)证明问题

$$u_{xx}-u_t=f(x,t),\ \text{当}\ x>0,\ t>0\ \text{时},$$
$$u(x,0)=g(x),\ \text{当}\ x>0\ \text{时},$$
$$u(0,t)=h(t),\ \text{当}\ t>0\ \text{时},$$

至多有一个解 u 对某常数 c 使得 $e^{-cx^2}u$ 有界．

5. 利用不等式(2)证明问题

$$u_{xx}-u_t=f(x,t),\ \text{当}\ x>0,\ t>0\ \text{时},$$
$$u(x,0)=g(x),\ \text{当}\ x>0\ \text{时},$$
$$-u_x(0,t)+u(0,t)=h(t),\ \text{当}\ t>0\ \text{时},$$

至多有一个解 u 对某常数 c 使得 $e^{-cx^2}u$ 有界．

第六节　Phragmèn-Lindelöf 原理

在第二章第九节中，我们讨论过无界区域中椭圆型方程的解．我们发现只有解在无穷远处满足某些条件时边值问题才是唯一可

解的。对于抛物型方程的解也呈现出类似的现象。在第五节1.1，我们曾看到利用三抛物线定理可以证明热方程初值问题解的唯一性。那里的结果对于当 $|x| \to \infty$ 时满足一个特别的增长条件的函数才成立。在这一节中我们要对在无界区域中满足抛物型不等式的函数建立最大值原理。然后利用这个结果就能够把定理9叙述的关于热方程的唯一性结论推广到一般的抛物型方程上去。

设 D 是 n 维欧氏空间中的一个无界区域，考虑定义在区域 $E = D \times (0,T)$ 中的函数 $u(\boldsymbol{x}, t) \equiv u(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$。假设函数 u 在 E 中满足微分不等式

$$(L + h)[u] \geqslant 0, \tag{1}$$

其中 $h = h(\boldsymbol{x},t) \leqslant 0$，而 L 是由

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x},t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x},t) \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t} \tag{2}$$

给出的一致抛物型算子。类似于定理7给出的最大值原理可应用于函数 u，但是，由于 E 是无界的，我们不可能象有界区域的情形那样得出 u 总是在 $t = 0$ 或者在 $\partial D \times (0, T)$ 上取到最大值。在研究无界区域中的椭圆型方程时我们已经看到过这种情形的例子了（见第二章第九节第109页到第110页的讨论）。当然，如果当 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \to \infty$ 时对 $0 \leqslant t \leqslant T$ 的 t $u \to 0$ 一致成立，又若在 $t = 0$ 和 $\partial D \times (0, T)$ 上 $u \leqslant 0$，那么定理7的一个简单推论就是在 E 中 $u \leqslant 0$。因此，我们就能够确定当 $\boldsymbol{x} \to \infty$ 时趋向某一极限的函数的最大值的范围。我们要在下个定理中证明对于更广泛的一类函数，这种类型的最大值原理成立。

定理 10. 设 D 是 n 维空间中的无界区域，又设 E 是区域 $D \times (0,T)$。假定 u 在 E 中满足 $(L + h)[u] \geqslant 0$，其中 L 是形为(2)式的带有有界系数的一致抛物型算子，$h(\boldsymbol{x}, t)$ 在 E 中有界。假设 u 对某正常数 c 满足增长条件

$$\liminf_{R \to \infty} e^{-cR^2} \left[\max_{\substack{x_1^2 + \cdots + x_n^2 = R^2 \\ 0 \leqslant t \leqslant T}} u(\boldsymbol{x}, t) \right] \leqslant 0. \tag{3}$$

如果当 $t=0$ 时 $u\leqslant 0$，在 $\partial D\times(0,T)$ 上 $u\leqslant 0$，则在 E 中 $u\leqslant 0$。

证明. 我们令 $r^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 并定义函数

$$v(\boldsymbol{x},t)=u(\boldsymbol{x},t)e^{-c\gamma r^2/(\gamma-ct)-\beta t},$$

其中 c 是(3)中的常数，β,γ 是待定的常数. 由直接计算可得

$$e^{-c\gamma r^2/(\gamma-ct)-\beta t}(L+h)[u]$$

$$=L[v]+\frac{4c\gamma}{\gamma-ct}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_i\frac{\partial v}{\partial x_j}+H(\boldsymbol{x},t)v\geqslant 0,$$

其中

$$H(\boldsymbol{x},t)=\frac{4c^2\gamma^2}{(\gamma-ct)^2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+\frac{2c\gamma}{\gamma-ct}\sum_{i=1}^{n}$$

$$(a_{ii}+b_ix_i)+h(\boldsymbol{x},t)-\beta-\frac{c^2\gamma r^2}{(\gamma-ct)^2}.$$

因为抛物型算子 L 的系数有界，从而存在常数 M 使得

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\leqslant Mr^2.$$

所以

$$H(\boldsymbol{x},t)\leqslant-\frac{c^2\gamma r^2}{(\gamma-ct)^2}(1-4\gamma M)+\left[\frac{2c\gamma}{\gamma-ct}\right.$$

$$\left.\times\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_ix_i)+h(\boldsymbol{x},t)-\beta\right].$$

现在我们定义常数

$$A=\sup_{0\leqslant r\leqslant 1}\left|\sum_{i=1}^{n}b_ix_i\right|,\quad B=\sup_{r\geqslant 1}\left|\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{x_i}{r^2}\right|.$$

于是只要 $\gamma-ct>0$，函数 $H(\boldsymbol{x},t)$ 就满足不等式

$$H(\boldsymbol{x},t)\leqslant-\frac{c^2r^2\gamma}{(\gamma-ct)^2}\left[1-4\gamma M-\frac{2(\gamma-ct)}{c}B\right]$$

$$-\left[\beta-\frac{2c\gamma}{\gamma-ct}\left(A+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}-h\right)\right].$$

现取 γ 如此之小使上式右端第一个括号中的表达式对区间 $[0,\gamma/$

$2c]$ 上的 t 恒为正值．其次再取 β 如此之大，使第二个括号中的表达式恒正．所以对这样选出的 β 和 γ，我们得到在 $D\times[0,\gamma/2c]$ 中 $H(\boldsymbol{x},t)\leqslant 0$．

用 D_R 表示 D 在球 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<R^2$ 中的部分．由定理 7，函数 $v(\boldsymbol{x},t)$ 在 $D_R\times[0,\gamma/2c]$ 的内点上不能有正的最大值．对任何 $\varepsilon>0$，条件(3)表明对某个任意大的 R 在 $\partial D_R\times[0,\gamma/2c]$ 上有 $v<\varepsilon$；当 $t=0$ 时还有 $v\leqslant 0$．所以在 $D_R\times[0,\gamma/2c]$ 中 $v<\varepsilon$．令 $R\to\infty$ 及 $\varepsilon\to 0$，我们就得到在 $D\times[0,\gamma/2c]$ 中 $v\leqslant 0$．特别当 $\boldsymbol{x}\in D$ 时 $v(\boldsymbol{x},\gamma/2c)\leqslant 0$．现以 $t=\gamma/2c$ 代替 $t=0$ 作为初始面，可以重复以上的全部论证．这样我们得到在 $D\times[\gamma/2c,\ 2(\gamma/2c)]$ 中 $v\leqslant 0$．经过有限步后就可得出在 E 中 $v\leqslant 0$，因此在 E 中也有 $u\leqslant 0$．

附注． (i) 从证明的细节中可看出假设量

$$r^{-2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\quad (1+r^2)^{-1}\sum_{i=1}^{n}b_ix_i$$

和 h 上有界就足够了．而且，如果 $h<K(1+r^{2\delta})$，其中 K 是一个常数，而 $0<\delta<1$，那么容易看出

$$h<K[1+(\gamma/\delta)^{-\delta/(1-\delta)}(1-\delta)+\gamma r^2],$$

从而仍能完成定理的证明．

(ii) 如果 $h(\boldsymbol{x},t)\equiv 0$，那么我们可从 u 中减去任一常数，并应用定理 10 得出 u 或在 $t=0$ 或在 $\partial D\times[0,T]$ 上达到它(无论正或负)的最大值．如果 $h(\boldsymbol{x},t)\leqslant 0$，对于非负最大值也可得出同样结论．

(iii) 对满足 $(L+h)[u]\leqslant 0$ 的函数，我们有相应的最小值原理．与椭圆型算子的结果类似，我们把定理 10 称为 Phragmèn-Lindelöf 原理．

下面的唯一性结果是定理 10 的一个直接推论

定理 11． 设 $u(\boldsymbol{x},t),v(\boldsymbol{x},t)$ 是

$$(L+h)[u]=f(\boldsymbol{x},t)$$

在 $D\times(0,T)$ 中的解(D 无界)，又设 u 和 v 在 $(D\cup\partial D)\times[0,T]$ 上连续. 假设在 D 中

$$u(\boldsymbol{x},0)=v(\boldsymbol{x},0)=g_1(\boldsymbol{x}),$$

在 $\partial D\times[0,T]$ 上

$$u(\boldsymbol{x},t)=v(\boldsymbol{x},t)=g_2(\boldsymbol{x},t),$$

而且，$|u|$ 和 $|v|$ 都对某常数 $c>0$ 满足条件(3). 那么 $u\equiv v$ 在 $D\times[0,T]$ 成立.

证明. 我们定义 $w=u-v$,并注意定理 10 可应用于 w. 因此在 $D\times[0,T]$ 中 $w\leqslant 0$. 把同样的论证再用于 $(-w)$,从而 $w\equiv 0$.

附注. (i) 在这里和定理 8,9 中,我们假设了解连续地取初值和边值. 但是,例如,只假定 u 对每一个 $\boldsymbol{x}$ 是 t 的连续函数就不够了,即如果我们只假设对 D 中每一固定的 $\boldsymbol{x}$

$$\lim_{t\to 0^+}u(\boldsymbol{x},t)=g_1(\boldsymbol{x}),$$

结论便不正确. 为验证这一点,我们令 $L=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial}{\partial t}$ 并选取

$$u=xt^{-3/2}e^{-x^2/4t}.$$

于是对所有的 $t>0$ 和 $-\infty<x<\infty$, u 满足 $L[u]=0$.我们还知道对每一固定的实数 x 有 $\lim\limits_{t\to 0^+}u(x,t)=0$. 但是，$u$ 并不恒等于零. 实际上在(0,0)的每个邻域中上述函数 u 是无界的.

(ii) Phragmèn-Lindelöf 原理(定理 10)和唯一性结果(定理 11)都能够被推广到抛物型不等式和方程的在 $\partial D\times(0,T]$ 上满足更一般的边界条件

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\beta u=g(\boldsymbol{x},t)$$

的解上去.

(iii) 上面的结果和证明都和对椭圆型算子建立 Phragmèn-Lindelöf 原理时用过的结果和证明相类似. 事实上，我们能够不加改变地照搬整个椭圆型理论，并且还能找出那种例外集：即在

适当的条件下在它上面可以不规定边值的集合. 在这方面提一下以下事实是有意义的，如果一个函数 $u(\boldsymbol{x})$ 满足椭圆型不等式 $(L+h)[u]\geq 0$，那么，由于 u 与 t 无关，它显然满足抛物型不等式 $\left(L+h-\frac{\partial}{\partial t}\right)[u]\geq 0$. 假设我们有如下的 Phragmèn-Lindelöf 定理，它断言 $\left(L+h-\frac{\partial}{\partial t}\right)[v]\geq 0$ 在 $D\times(0,T)$ 的非常数解 v，在这个集合中总是小于它当 $t=0$ 时在 D 中的最大值或它在侧边界 $\partial D\times(0,T)$ 的子集 $S\times(0,T)$ 上的最大值. 于是显然 $u(\boldsymbol{x})$ 在 D 中小于它在 S 上的最大值. 这样一来，如果 $(\partial D-S)\times(0,T)$ 是抛物型算子 $L+h-\frac{\partial}{\partial t}$ 的例外集，则 $\partial D-S$ 就是椭圆型算子 L 的例外集.

另一方面，如果我们有正函数序列 w_k，它们能够被用来建立椭圆型算子 $L+h$ 的具有例外集 $\partial D-S$ 的 Phragmèn-Lindelöf 原理(第二章定理 19)，则这同一列函数对 $L+h-\frac{\partial}{\partial t}$ 就建立了有例外集 $(\partial D-S)\times(0,T)$ 的 Phragmèn-Lindelöf 原理.

(iv) 只要知道了 Phragmèn-Lindelöf 定理并能解出一个适当的边值问题，就可以用第二章第九节中对椭圆型方程曾用过的同样方法来建立可去奇性定理.

(v) D. G. Aronson [2] 已经得到了更一般的可去奇性定理.

第七节　非线性算子

在第一、二章中我们已经证明了怎样利用最大值原理来得到非线性方程的结果. 可以用同样的方法来给出非线性抛物型方程的结果，我们考虑向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 以及矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij}),i,j=1,2,\cdots,n$. 令 $F(\boldsymbol{x},t,u,\boldsymbol{p},\boldsymbol{R})$ 是它的 n^2+2n+2 个变量的连续可微函数. 我们将用记号 $F(\boldsymbol{x},t,u,$

p_i, r_{ij}）来表示上述的函数，用 p_i 和 r_{ij} 表示 F 的一般变元．如果对所有非零实向量 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，当把 $p_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 和 $r_{ij}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ 在给定点 $(\boldsymbol{x},t)$ 的值代入在下面的(1)中出现的偏导数的变元时

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} \xi_i \xi_j > 0, \quad \text{当 } \xi \neq 0 \text{ 时}, \tag{1}$$

我们就称 F 关于函数 $u(\boldsymbol{x},t)$ 在该点是**椭圆型的**．如果 F 在 $(\boldsymbol{x},t)$ 空间的区域 E 的每一点上都是椭圆型的，则称 F 在区域 E 中是椭圆型的．当 F 是椭圆型的，则称非线性算子

$$L[u]=F\left(\boldsymbol{x},t,u,\frac{\partial u}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)-\frac{\partial u}{\partial t} \tag{2}$$

是**抛物型的**．

我们可用(如定理 7 给出的)最大值原理来比较非线性抛物型方程的解．设 u 是

$$L[u]=f(\boldsymbol{x},t)$$

在 $(\boldsymbol{x},t)$ 空间的区域 E 中的解，其中 L 由(2)给出，又设 $w=w(\boldsymbol{x},t)$ 在 E 中满足

$$L[w] \leqslant f.$$

我们作函数

$$v(\boldsymbol{x},t)=u(\boldsymbol{x},t)-w(\boldsymbol{x},t)$$

并考虑不等式(用下标表示偏导数)

$$F(\boldsymbol{x},t,u,u_{x_i},u_{x_ix_j})-F(\boldsymbol{x},t,w,w_{x_i},w_{x_ix_j})-\frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0.$$

应用多元微积分学的平均值定理．令 θ 使得 $0<\theta<1$ 并计算在变元 $\theta u+(1-\theta)w$，$\theta u_{x_i}+(1-\theta)w_{x_i}$，$\theta u_{x_ix_j}+(1-\theta)\times w_{x_ix_j}$ 处 F 的导数值，我们求得

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)v-\frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0. \tag{3}$$

我们假设 F 对形如 $\theta u+(1-\theta)w, 0\leqslant\theta\leqslant 1$ 的所有函数在 E 中是椭圆型的. 在这个假设下,(3)的左端就是函数 v 的线性抛物型算子. 我们可用最大值原理(定理 7 后的附注(ii))来得到结论: 如果 v 在初始时刻和边界上非正,则 v 在 E 中非正.

上述讨论证实了关于逼近的以下结论.

定理 12. 设 D 是 n 维空间的有界区域, 又设 $E=D\times(0, T]$. 假设 u 是 $L[u]=f(\boldsymbol{x},t)$ 在 E 中的解, L 由(2)式给出, 而且 u 满足初始条件和边界条件

$$u(\boldsymbol{x},0)=g_1(\boldsymbol{x}) \quad \text{在}D\text{中},$$
$$u(\boldsymbol{x},t)=g_2(\boldsymbol{x},t) \quad \text{在 } \partial D\times(0,T) \text{ 上}.$$

我们假设 z 和 Z 在 E 中满足不等式

$$L[Z]\leqslant f(\boldsymbol{x},t)\leqslant L[z],$$

当 $0\leqslant\theta\leqslant 1$ 时 L 关于函数 $\theta u+(1-\theta)z$ 及 $\theta u+(1-\theta)z$ 是抛物型的. 如果

$$z(\boldsymbol{x},0)\leqslant g_1(\boldsymbol{x})\leqslant Z(\boldsymbol{x},0) \quad \text{在}D\text{中},$$
$$z\leqslant g_2\leqslant Z \quad \text{在 } \partial D\times(0,T) \text{ 上},$$

那么在 E 中

$$z(\boldsymbol{x},t)\leqslant u(\boldsymbol{x},t)\leqslant Z(\boldsymbol{x},t).$$

例. 通过均匀介质的一维热流由非线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\ \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{4}$$

决定,其中 k 是具有有界的一阶导数的正函数. 容易验证(4)对所有函数 u 是抛物型的. 因为任何常数满足(4), 因此应用定理 12 我们可得出: 对于任何解 u, 其最大值和最小值必在初始时刻或边界上达到.

第八节　弱耦合抛物型方程组

可以把满足二阶抛物型不等式的函数的最大值原理推广到某些抛物型不等式组. 考虑 k 个函数

$$u_1(\boldsymbol{x},t), u_2(\boldsymbol{x},t), \cdots, u_k(\boldsymbol{x},t)$$

的集合，将它看作是一个 k 维向量 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ 来处理．向量 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维欧氏空间中具有分量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个点．同向量 $\boldsymbol{u}$ 一起，还给出 k 个一致抛物型算子

$$L_\nu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(\nu)}(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i^{(\nu)}(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\nu = 1, 2, \cdots, k.$$

我们再引进以 $\{h_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t)\}$ $\mu, \nu = 1,2,\cdots,k$ 为元素的 $k \times k$ 函数矩阵 $H = H(\boldsymbol{x},t)$.

我们将对形为

$$\left.\begin{aligned} L_1[u_1] + \sum_{\nu=1}^{k} h_{1\nu}u_\nu \geqslant 0, \\ L_2[u_2] + \sum_{\nu=1}^{k} h_{2\nu}u_\nu \geqslant 0, \\ \vdots \qquad \vdots\ \vdots \quad \vdots \\ L_k[u_k] + \sum_{\nu=1}^{k} h_{k\nu}u_\nu \geqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

的抛物型不等式组建立最大值原理．

我们注意到(1)的每个不等式仅仅包含一个分量的导数，这个不等式组只是由不求微商的项耦合起来的；我们把这种形式的不等式组称为弱耦合抛物型不等式组．在研究几种自然衰变物质同时扩散时就会提出这种不等式组．

我们作一附加的假设：矩阵 H 的非对角线元素非负：

$$h_{\mu\nu} \geqslant 0, \mu \neq \nu, \mu, \nu = 1,2,\cdots,k. \tag{2}$$

我们用记号 $\boldsymbol{u} < 0$ 来表示它的每个分量 $u_\nu, \nu = 1,2,\cdots,k$ 是负的．类似地 $\boldsymbol{u} \leqslant 0$ 意味着每个分量非正．

对在 $(n+1)$ 维空间形为 $E = D \times (0,T)$ 的区域中满足严格的不等式组

$$L_\mu[u_\mu] + \sum_{\nu=1}^{k} h_{\mu\nu}u_\nu > 0,\ \mu = 1,2,\cdots,k \tag{3}$$

的向量值函数 $\boldsymbol{u}$ 容易证明最大值原理. 我们始终假设所有系数 $a_{ij}^{(\mu)}$, $b_i^{(\mu)}$ 和 $h_{\mu\nu}$ 在 E 中有界. 现在来证如果在 $t=0$ 和在 $\partial D\times(0,T)$ 上 $\boldsymbol{u}<0$ 则在 E 中 $\boldsymbol{u}<0$. 为此,我们假设不等式 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)<0$ 在 E 中一点 $P(\boldsymbol{x},t)$ 处不成立. 设 $\bar{t}$ 是 E 中使 $u(\boldsymbol{x},t)<0$ 的 t 值的最小上界. 于是由连续性可得 $u(\boldsymbol{x},\bar{t})\leqslant 0$,而且在 E 中某点 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{t})$ $\boldsymbol{u}$ 的某一分量必为零,即至少对一个分量 u_τ,我们有 $u_\tau(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{t})=0$. 因为在 $t\leqslant\bar{t}$ 时 $\boldsymbol{u}\leqslant 0$,所以在 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{t})$

$$L_\tau[u_\tau]\leqslant 0, \tag{4}$$

又由假设(2)在 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{t})$ 还有

$$\sum_{\nu=1}^{k} h_{\tau\nu}u_\nu\leqslant 0. \tag{5}$$

结合不等式(4)和(5)就与(3)中第 τ 个不等式矛盾,从而我们得到在 E 中 $\boldsymbol{u}<0$.

为了得到满足(1)而不是满足(3)的非正函数组 $\boldsymbol{u}$ 的最大值原理,我们首先选取常数 β 使得

$$\beta-\sum_{\nu=1}^{k} h_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t)>0,\quad \mu=1,2,\cdots,k$$

在 E 中处处成立;由于已设 H 的元素在 E 中有界,这种取法总是可能的. 于是,若 $\boldsymbol{u}$ 在 E 中满足不等式组(1),我们看到对于任何 $\varepsilon>0$

$$L_\mu[u_\mu-\varepsilon e^{\beta t}]+\sum_{\nu=1}^{k} h_{\mu\nu}[u_\nu-\varepsilon e^{\beta t}]>0,\ \mu=1,2,\cdots,k$$

在 E 中成立. 引进分量为 $v_\mu=u_\mu-\varepsilon e^{\beta t}$, $\mu=1,2,\cdots,k$ 的向量函数 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$, 并注意到从在 $t=0$ 和 $\partial D\times(0,T)$ 上成立的不等式 $\boldsymbol{u}\leqslant 0$ 可推出 $\boldsymbol{v}<0$ 在同样的点集上成立. 对每个 $\varepsilon>0$,前面对满足严格不等式组的函数组建立的最大值原理对 $\boldsymbol{v}$ 是成立的. 令 $\varepsilon\to 0$,我们就得出在 E 中 $\boldsymbol{u}\leqslant 0$. 现在从 $h_{\mu\nu}\geqslant 0$, $\mu\neq\nu$ 可推出它的每个分量 u_μ 在 E 中满足不等式

$$L_\mu[u_\mu]+h_{\mu\mu}u_\mu\geqslant 0.$$

对任何常数 β, 我们把这个不等式改写成

$$L_\mu[e^{\beta t}u_\mu] + (h_{\mu\mu} + \beta)e^{\beta t}u_\mu \geqslant 0 \quad 在 E 中.$$

选取 β 足够大使 $h_{\mu\mu} + \beta \geqslant 0$ 在 E 中成立. 由于在 E 中 $u_\mu \leqslant 0$, 我们得出

$$\left.\begin{array}{l} L_\mu[e^{\beta t}u_\mu] \geqslant 0 \quad 在 E 中, \\ e^{\beta t}u_\mu \leqslant 0 \quad 在 t = 0 和 \partial D \times (0,T) 上. \end{array}\right\} \tag{6}$$

从定理 5 可得: 如果在某内点 $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$处 $u_\mu = 0$, 那么, 当 $t < t_0$ 时 $u_\mu \equiv 0$. 这样我们就得到了如下的强最大值原理.

定理 13. 假设 $\boldsymbol{u}$ 在有界区域 $E = D \times (0,T)$ 中满足一致抛物型不等式组(1). 如果在 $t = 0$ 和 $\partial D \times (0,T)$ 上 $\boldsymbol{u} \leqslant 0$, 又若 H 满足条件(2),则在 E 中 $\boldsymbol{u} \leqslant 0$,而且,如果在一个内点$(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ 处 $u_\mu = 0$,则当 $t \leqslant t_0$ 时 $u_\mu \equiv 0$.

对不等式组(6)应用定理 6, 我们可得出以下的结论.

定理 14. 设 $\boldsymbol{u}$ 在区域 $E = D \times (0, T)$ 中满足不等式组(1),H 满足(2), 并且 $\boldsymbol{u} \leqslant 0$. 如果某个分量 u_τ 在 $\partial D \times (0, T)$ 的一个边界点 P 处为零,又若存在以 P 为其边界点的 E 中的球 K, 使得在K 中 $u_\tau < 0$,则在点 P 的任何外方向导数

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial \boldsymbol{\nu}} > 0.$$

定理 13 和 14 表明, 除非在特殊情况下,零不可能是(1)的非正解 $\boldsymbol{u}$ 的最大值. 现在我们把上面的定理推广到有非负最大值M 的函数 $\boldsymbol{u}$. 我们只需把同样的方法简单地用到以 $u_\nu - M$, $\nu = 1,2,\cdots,k$ 为分量的向量函数上去即可. 为此, 需要假设矩阵H 有性质

$$\sum_{\nu=1}^{k} h_{\mu\nu} \leqslant 0, \mu = 1,2,\cdots,k. \tag{7}$$

对常数M ,我们把 k 个分量都等于M的向量定义为向量 $\boldsymbol{M}$.

定理 15. 假设 $\boldsymbol{u}$ 满足不等式组(1), H 满足(2)和(7), 又设当 $t = 0$ 时在D中和在 $\partial D \times [0,T]$ 上 $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{M} \leqslant 0$. 那么, 如果$M \geqslant 0$则在$E = D \times (0,T)$ 中$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{M} \leqslant 0$. 如果在$E$的一内

点 $(\boldsymbol{x}, t_0)$ 处 $u_\tau = M$，则当 $t \leqslant t_0$ 时 $u_\tau \equiv M$. 如果在一个具有定理 14 中指出的性质的边界点 P 处 $u_\tau = M$，并在一适当的球 K 中 $u_\tau < M$，则在 P 点 $\dfrac{\partial u_\tau}{\partial \boldsymbol{\nu}} > 0$，其中 $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ 是任一外方向导数.

附注. (i)如果我们引进变量替换

$$\bar{u}_\mu = u_\mu e^{-ct}, \quad \mu = 1, 2, \cdots, k, \tag{8}$$

可得

$$e^{-ct} L_\mu[u_\mu] = L_\mu[\bar{u}_\mu] - c\bar{u}_\mu, \quad \mu = 1, 2, \cdots, k.$$

因此，当 $\boldsymbol{u}$ 满足不等式组(1)时，向量 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 就满足一个同样类型的不等式组，但在每一不等式中要用 $h_{\mu\mu} - c$ 代替 $h_{\mu\mu}$. 选取 c 充分大总可使条件(7)得到满足(我们总是假设H的元素有界).

(ii) 假设在一个内点$(\boldsymbol{x}_0, t_0)$处 $u_\tau = M$. 于是当 $t \leqslant t_0$ 时 $u_\tau \equiv M$ 且(1)的第 τ 个不等式变成

$$\sum_{\nu=1}^{k} h_{\tau\nu} u_\nu \geqslant 0.$$

由(2)，(7)，以及 $\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{M}$的事实，我们有

$$\sum_{\nu=1}^{k} h_{\tau\nu} u_\nu \leqslant M \sum_{\nu=1}^{k} h_{\tau\nu} \leqslant 0.$$

因此，所有这些不等式必须是等式. 特别当 $t \leqslant t_0$ 时 $\sum\limits_{\nu=1}^{k} h_{\tau\nu} \equiv 0$. 而且，只要在某点$(\boldsymbol{x}, t_0)$处$h_{\tau\nu} \neq 0$，当 $t \leqslant t_0$ 时就有 $u_\nu \equiv M$. 即使 $h_{\tau\nu}(\boldsymbol{x}, t_0) \equiv 0$，但若存在一个指标 $\boldsymbol{\mu}$ 使得 $h_{\tau\mu}(\boldsymbol{x}, t_0) \neq 0$ 及 $h_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}, t_0) \neq 0$，我们也能得出 $u_\mu \equiv M$，所以 $u_\nu \equiv M$. 因此，除非在某种非常特殊的情况之下，我们可以得出：如果 $u_\tau(\boldsymbol{x}_0, t_0) = M$，则当 $t \leqslant t_0$ 时 $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{M}$，从而$H$的所有行和是零.

定理 15 给出了下述问题的唯一性定理以及解的界：

$$
\left.\begin{aligned}
L_\mu[u_\mu]+\sum_{\nu=1}^{k} h_{\mu\nu}u_\nu=f_\mu \quad &\text{在 } D\times(0,T)\text{ 中},\\
u_\mu(\boldsymbol{x},0)=g_\mu(\boldsymbol{x}) \quad &\text{在 } D \text{ 中},\\
u_\mu=\bar{h}_\mu \quad &\text{在 } \Gamma_1\times(0,T)\text{ 上},\\
\frac{\partial u_\mu}{\partial \boldsymbol{\nu}_\mu}+\sum_{\nu=1}^{k} s_{\mu\nu}u_\nu=\bar{\bar{h}}_\mu \quad &\text{在 } \Gamma_2\times(0,T)\text{ 上},
\end{aligned}\right\}\mu=1,2,\cdots,k,
$$

其中 D 是 n 维欧氏空间中的一个区域，$\Gamma_1\cup\Gamma_2=\partial D$. 每个 $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_\mu}$ 都是外方向导数. $f_\mu, g_\mu, \bar{h}_\mu, \bar{\bar{h}}_\mu$ 都是给定的函数，H 满足条件(2)，元素为 $\{s_{\mu\nu}\}$ 的矩阵 S 具有性质

$$
s_{\mu\nu}\leqslant 0,\ \mu\neq\nu \text{ 及 } \sum_{\nu=1}^{k} s_{\mu\nu}\geqslant 0, \mu=1,\ 2,\cdots,k.
$$

如果与时间无关的向量函数 $u(\boldsymbol{x})$ 在区域 D 中满足弱耦合椭圆型不等式组

$$
\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(\mu)}\frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i^{(\mu)}\frac{\partial u_\mu}{\partial x_i}+\sum_{\nu=1}^{k} h_{\mu\nu}u_\nu\geqslant 0,
$$

$$
\mu=1,2,\cdots,k,
$$

则 $\boldsymbol{u}$ 在 $D\times[0,T]$ 中也满足(1). 如果 H 满足条件(2)和(7)，我们能够用定理 15 来建立最大值原理：如果在 ∂D 上 $\boldsymbol{u}\leqslant\boldsymbol{M}$，且 $\boldsymbol{M}\geqslant 0$，则在 D 中 $\boldsymbol{u}\leqslant\boldsymbol{M}$. 这样，我们对椭圆型方程组就得到一个最大值原理. 我们注意到变量替换(8)已不再适用，所以条件(7)对椭圆组是一个真正的限制.

附注. (i)上述结果可以被推广来给出形为

$$
F_\mu\left(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{u},\frac{\partial u_\mu}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u_\mu}{\partial x_n},\frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x_1\partial x_2},\cdots,\frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x_n^2}\right)
$$

$$
-\frac{\partial u_\mu}{\partial t}=f_\mu,\quad \mu=1,2,\cdots,k
$$

的弱耦合非线性抛物组的比较定理.

(ii) 如果不等式之间有更强的耦合关系，例如在一阶导数项

中出现了耦合，最大值原理失效．例如，函数组

$$u_1 = -e^{x+t}, \quad u_2 = t - 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

在区域 E：$\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ 中满足不等式组

$$u_{1xx} - u_{1t} \geqslant 0,$$

$$u_{2xx} - 9u_{1x} - u_{2t} \geqslant 0.$$

但是，u_1 和 u_2 在 $t=1$ 之下的 E 的边界上非正，而 u_2 在直线 $x = \frac{1}{2}$ 上是正的．这样一来，如果要使最大值原理成立，弱耦合性便不能作明显地加强．

(iii) 对另一类弱耦合抛物组，Szepticky [1] 和 Stys [1] 给出了不同形式的最大值原理．

(iv) Habetler 和 Martino [1] 讨论了弱耦合抛物组的一个应用以及它的某些性质．

习　　题

1．证明问题

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 + u_2 = 0 \\ &\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u_2}{\partial t} + 2u_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{当} 0<x<1, t>0 \text{时},$$

$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = u_2(0,t) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(1,t) = 0,$$

$$u_1(x,0) = \sin \pi x,$$

$$u_2(x,0) = 0,$$

至多有一个解．

2．求出问题 1 中 $u_2(1,1)$ 的上、下界．

3．试证：如果在 $D \cup \partial D$ 上存在向量场 $w(x) > 0$ 使得在 D 中

$$L_\mu[w_\mu] + \sum_{\nu=1}^{k} h_{\mu\nu} w_\nu \leqslant 0, \quad \mu = 1, 2, \cdots, k,$$

又如果 $u(x)$ 满足椭圆型不等式组

$$L_\mu[u_\mu] + \sum_{\nu=1}^{k} h_{\mu\nu} u_\nu \geqslant 0, \quad h_{\mu\nu} \geqslant 0, \quad \mu \neq \nu,$$

其中

$$L_\mu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(\mu)}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i^{(\mu)}(x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

那么，∂D 上 $u \leqslant Mw$ 蕴涵着当 $M \geqslant 0$ 时在 D 中 $u \leqslant Mw$。

提示：求出 u_ν/w_ν 的不等式组。

文 献 注 记

E. F. Levi[1,2] 发现了热传导方程的弱最大值原理。M. Picone [2,3] 给出了一般抛物型方程的弱最大值原理。 强最大值原理是由 L. Nirenberg [1]证明的。R. Vyborny [1]，以及 A. Friedman[2] 和 C. Pucci [5] 独立地建立了外方向导数为正的结论。A. Friedman 还把这些结论推广到了抛物型不等式的弱解上去。

类似于 Landis [2,3] 的三球面定理的对于抛物型方程的三柱面定理是由 A. Ya. Glagelova[1] 给出的。

我们讲过的无界区域上的唯一性定理是由 A. N. Tikhonov[1] 证明的。S. Täcklind[1] 给出了一个稍微强一些的结果。

M. Picone [3], M. Krzyzański [1,2, 3], W. Mlak [1], R. Výborný [1], P. Besala [1], I. Lojczyk-Królikiewicz [1], W. Bodanko [1], D. G. Aronson [3] 以及 D. G. Aronson 和 P. Besala [1] 在关于系数的各种假设之下得到了无界区域上最大值原理的推广以及相应的唯一性定理。

D. V. Widder [1] 给出了热传导方程正解的不同的唯一性定理，D. G. Aronson 和 P. Besala [1] 把它推广到了一般的抛物型方程。

A. Friedman[1] 得到了一个 Phragmèn-Lindelöf 型的定理。D. G. Aronson [2] 和 B. Pini[1] 给出了可去奇性定理。

M. Nagumo 和 S. Simoda [1], H. Westphal [1], O. A. Oleĭnik 和 T. D. Wentzel [1,2], P. Besala [4], J. Kadlec 和 R. Výborný [1], S. Kaplan [1], J. Szarski [5], R. M. Redheffer [4] 以及 I. I. Kolodner 和 R. N. Pederson [1] 对非线性抛物型方程的最大值原理作过推广。

L. Collatz [1, 2, 3], C. Pucci [2], H. Westphal [1], K. Nickel [2] J. Schröder [1,2], R. M. Redheffer [4] 和 W. Walter [1, 2, 3] 等利用最大值原理给定了关于解的逼近以及误差的界方面的结果。

弱耦合非线性抛物型方程组的最大值原理是 J. Szarski [3, 4, 5], W. Mlak [1], J. Schröder [1,2], P. Besala [2,3] 以及 A. McNabb [1] 等给出

的. P. Szeptycki [1] 和 T. Stys[1] 发现了不同类型的最大值原理,这里是解向量的欧氏长度有界而不是它的分量的最大值有界. R. K. Juberg [1]证明了由未知函数的一阶导数相耦合的非线性抛物组解的欧氏长度可以用一个常数乘上它的初值和边值最大模来估计.

J. Hadamard [1] 和 B. Pini[2] 证明了热传导方程的 Harnack 不等式. J. Moser [2] 对一类非常一般的二阶线性抛物型方程给出了 Harnack 不等式. D. G. Aronson 和 J. B. Serrin [1] 以及 N. S. Trudinger [2] 把它们推广到了非线性方程. 对抛物组的 Harnack 不等式和 Liouville 定理是 S. D. Eidelman [1] 给出的.

K. Nickel [1], O. A. Oleĭnik [2] 和 W. Velte 已把最大值原理用到了粘性流体流的边界层的研究中去. D. G. Aronson [1] 还发现了最大值原理在奇摄动问题解的渐近性质的研究中的一个应用.

M. Picone [1], G. Fichera [2,3], P. Hartman 和 R. Sacksteder [1], O. A. Oleĭnik [3,4] 对形状为

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+h(x)u=0$$

的椭圆-抛物型方程,其中只知道矩阵 a_{ij} 是半正定的,即对任何向量 ξ

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq 0$$

的解已经得到并应用了最大值原理.

在 L. Bers, F. John 和 M. Schechter[1], P. Garabedian [1], G. Hellwig [1], I. G. Petrovesky [1] 以及 H. F. Weinberger [4] 等书中可以找到最大值原理的其它介绍. 在 A. Friedman [1], W. Walter [3] 以及 J. Szarski [5] 等书中,在 E. M. Landis [1,3], A. M. Il'in, A. S. Kalashnikov 和 O. A. Oleĭnik[1], 以及 O. A. Oleĭnik 和 S. N. Kružkov [1] 等综合性论文中有与抛物型偏微分方程有关结果的广泛的评述.

第四章 双曲型方程

第一节 波动方程

双曲型方程和不等式的解并不显示出前几章研究过的那种类型的最大值原理．即使在两个自变量的波动方程[1]

$$u_{xx} - u_{tt} = 0 \tag{1}$$

这种最简单的情形下，也容易看出非常数解 u 在区域中的最大值可以在内点达到．例如，我们注意到函数

$$u = \sin x \sin t$$

满足上述方程，但它在正方形 $0 < x < \pi$, $0 < t < \pi$ 的中心 $(\pi/2, \pi/2)$ 达到它的最大值．

为了找出一种可能的最大值原理，我们来研究双曲型方程适定的边值和初值问题的性质．

波动方程(1)描述了均匀弦在张力作用下的横向运动． 对于这种力学系统最基本的问题是初值问题． 在这种问题中我们在 $t = 0$ 的某区间 $2\alpha \leqslant x \leqslant 2\beta$ 上规定了 u 和 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ 的值． 我们将要证明，在所谓特征三角形(即以 $t = 0$ 上区间 $2\alpha \leqslant x \leqslant 2\beta$，以及通过点$(2\alpha, 0)$和$(2\beta, 0)$并与 x 轴夹角为 $\pm\pi/4$ 的直线作为边的三角形)中(见图 1)，运动就被唯一地确定了． 我们的证明是利用 Riemann 方法可得出这个问题的显式解．

设 u 是二次连续可微函数，并设

$$L[u] \equiv u_{xx} - u_{tt},$$

在以 $A(2\alpha, 0)$, $B(2\beta, 0)$ 和 $C(\alpha + \beta, \beta - \alpha)$ 为顶点的三角形 D

1) 在这一章里，我们将常常用下标来表示偏导数，例如 u_{xx} 意即 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$．

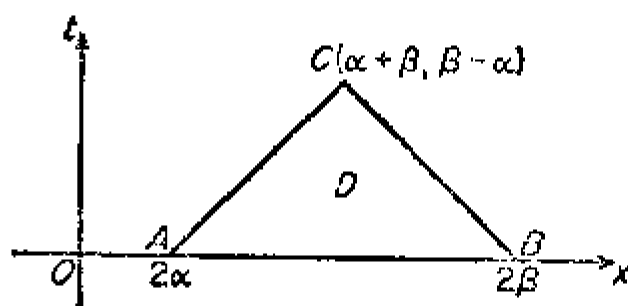


图 1

中被给出. 我们纯形式地进行推导,考虑表达式

$$\iint_D L[u]dxdt = \iint_D (u_{xx} - u_{tt})dxdt.$$

简单地应用 Stokes 公式[1]可得

$$\iint_D L[u]dxdt = \int_A^B u_t dx + \int_B^C (u_x dt + u_t dx) + \int_C^A (u_x dt + u_t dx).$$

因为沿线段 BC $dx = -dt$,沿线段 CA $dx = dt$,我们有

$$\iint_D L[u]dxdt = \int_A^B u_t dx - \int_B^C (u_x dx + u_t dt) + \int_C^A (u_x dx + u_t dt),$$

后两个积分现可积出,于是我们得到

$$\iint_D L[u]dxdt = \int_A^B u_t dx + u(A) + u(B) - 2u(C)$$

或

$$u(C) = \frac{1}{2}[u(A) + u(B)] + \frac{1}{2}\int_A^B u_t dx - \frac{1}{2}\iint_D L[u]dxdt. \tag{2}$$

---

1) 二维的 Stokes 定理断言: 对任何边界 ∂D 光滑的有界区域 D 以及任何连续可微函数 $p(x,t)$ 和 $q(x,t)$, 我们有

$$\iint_D \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial t}\right)dxdt = \oint_{\partial D} (pdt - qdx),$$

其中绕 ∂D 的积分沿反时针方向计算. 这个恒等式可以散度定理及单位外法向量的分量是 $(dt/ds, -dx/ds)$ 的事实推出.

因此，u 在 C 点的值由 $u(2\alpha,0)$，$u(2\beta,0)$，$t=0$ 上 $2\alpha<x<2\beta$ 中的 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 以及 D 中的 $L[u]$ 唯一确定.

特别是，我们看到如果

$$L[u]\geqslant 0 \quad 在 D 中 \tag{3}$$

以及

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\leqslant 0,\ 2\alpha\leqslant x\leqslant 2\beta \tag{4}$$

则

$$u(C)\leqslant\frac{1}{2}[u(A)+u(B)].$$

如果在特征三角形 ABC 中任取一点 C'，我们可通过 x 轴上的 A'，B' 作直角在 C' 的等腰直角三角形 $A'B'C'$. 于是用同样的方法可求得

$$u(C')\leqslant\frac{1}{2}[u(A')+u(B')].$$

从这个不等式显然知道 u 在三角形 ABC 中的值不可能超过 u 在初始直线段 AB 上的最大值. 因此，如果 u 满足(3)和(4)，它在 $D\cup\partial D$ 上的最大值必在初始直线 AB 上达到.

这个结果是一个弱最大值原理，因为它没有给出有关 u 是否可在内点上达到它的最大值的任何信息. 事实上，函数

$$u(x,t)=\cos x\cos t$$

满足 $L[u]=0$；还满足

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,$$

u 在初始直线上的 $(0,0)$ 和 $(2\pi,0)$ 达到它的最大值，而且它也在 (π,π) 点被达到.

关系式(2)表明：如果函数 $u_t(x,0)$ 在 AB 上严格为负或者在 D 中 $L[u]>0$，那么 u 在 C 点的值就严格小于它在 A 和 B 的平均值. 在这种情形下我们看出如果用 M 表示 u 在 AB 上的最大

值，则在D中 $u<M$.

习　　题

1. 证明：如果在图1所示的区域D中 $L[u]=u_{xx}-u_{tt}+u\geqslant 0$，又如果$u(x,0)\leqslant M<0$，$u_t(x,0)\leqslant 0$，则在$D$中 $u<0$.

2. 证明：如果在图1所示的区域D中 $|u_{xx}-u_{tt}|\leqslant A$，又如果$|u(x,0)|\leqslant B$，$|u_t(x,0)|\leqslant C$，则

$$|u(x,t)|\leqslant B+Ct+\frac{1}{2}At^2.$$

第二节　带有低阶项的波动算子

现在我们来考虑算子

$$(L+h)[u]\equiv u_{xx}-u_{tt}+d(x,t)u_x+e(x,t)u_t+h(x,t)u,$$

并应用我们对波动方程用过的同样方法. 若仍用D表示同样的三角形区域ABC(图1)，如果u在D中满足$(L+h)[u]\geqslant 0$，从Stokes 公式我们有

$$\begin{aligned}
0&\leqslant\iint_D [u_{xx}-u_{tt}+du_x+eu_t+hu]dxdt\\
&=\iint_D (h-d_x-e_t)udxdt+\int_A^B(u_t-eu)dx\\
&\quad+\int_B^C[(u_x+du)dt+(u_t-eu)dx]\\
&\quad+\int_C^A[(u_x+du)dt+(u_t-eu)dx].
\end{aligned}$$

仍然注意沿BC有$dx=-dt$，沿AC有$dx=dt$，我们就得到关系式

$$\begin{aligned}
&\iint_D (h-d_x-e_t)udxdt+\int_A^B(u_t-eu)dx\\
&\quad-\int_B^C(u_xdx+u_tdt)+\int_C^A(u_xdx+u_tdt)\\
&\quad+\int_B^C u(d+e)dt+\int_C^A u(d-e)dt\geqslant 0.
\end{aligned}$$

把第三、四项积分积出，我们就有

$$u(C) \leqslant \frac{1}{2}[u(A)+u(B)]+\frac{1}{2}\iint_D (h-d_x-e_t)u\,dx\,dt$$
$$+\frac{1}{2}\int_A^B (u_t-eu)dx+\frac{1}{2}\int_B^C u(d+e)dt$$
$$+\frac{1}{2}\int_A^C u(e-d)dt.$$

如果，由于某种原因，右端所有的积分都非正，那么，对函数 u 弱最大值原理必成立．我们假设

$$\left.\begin{array}{ll} u_t-eu\leqslant 0 & \text{在 } AB \text{ 上}, \\ u<0 & \text{在 } AB \text{ 上}, \\ h-d_x-e_t\geqslant 0 & \text{在 } D \text{ 中}, \\ d+e\geqslant 0 & \text{在 } D \text{ 中}, \\ e-d\geqslant 0 & \text{在 } D \text{ 中}. \end{array}\right\} \tag{1}$$

假设 u 在 D 中某处不是负的．于是，存在一点 $D(x_0,t_0)$，使得 u 在这点为零，并使当 $t<t_0$ 时在所有的 (x,t) 上 u 是负的．在这种情形下，在与 ABC 相似的 $A'B'$ 在 x 轴上的三角形 $A'B'P$ 中 $u\leqslant 0$，我们有

$$0=u(P)\leqslant \frac{1}{2}[u(A')+u(B')]+\frac{1}{2}\iint_{A'B'P}(h-d_x$$
$$-e_t)u\,dx\,dt+\frac{1}{2}\int_{A'}^{B'}(u_t-eu)dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_{B'}^{P}u(d+e)dt+\frac{1}{2}\int_{A'}^{P}u(e-d)dt. \tag{2}$$

在这些条件下因为(2)的右端为负（因为有(1)），就得出了矛盾，所以在 D 中 $u<0$．公式(2)中的不等号适用于 D 中的任何点 P，而且，如果我们扔掉那些包含积分的项，不等式将得到加强．因此我们看出 $u(P)$ 不可能大于 AB 上两点处 u 的平均值．

我们希望放松(1)中在 AB 上严格的不等式 $u<0$，而代之以在 AB 上 $u\leqslant 0$．为此我们假设 e 有界，h 上有界．于是经计算知，当 α 充分大时，不等式[1]

1) 在这一章中，我们用德文字母 $\mathfrak{e}$ 表示自然对数的底，用斜体字母 e 表示算子 L 的系数．

$$(L+h)[e^{\alpha t}] \equiv [-\alpha^2 + e\alpha + h]e^{\alpha t} \leqslant 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{\alpha t}) - e e^{\alpha t} \geqslant 0$$

成立．所以，如果用条件

$$\left.\begin{array}{ll} u_t - e u \leqslant 0 & \text{在} AB \text{上}, \\ u \leqslant 0 & \text{在} AB \text{上}, \\ h - d_x - e_t \geqslant 0 & \text{在} D \text{中}, \\ d + e \geqslant 0 & \text{在} D \text{中}, \\ e - d \geqslant 0 & \text{在} D \text{中}, \end{array}\right\} \qquad (3)$$

代替条件(1)，我们发现对任何 $\varepsilon > 0$，量 $u - \varepsilon e^{\alpha t}$ 不超过它在 AB 上的最大值．令 $\varepsilon \to 0$，我们就得出 u 在 AB 上取到它的最大值．这样我们已经建立了如下的原理：如果在 D 中 $(L+h)[u] \geqslant 0$ 并且条件(3)成立，则在 D 中 $u \leqslant 0$ 成立．

习　　题

1．设 D 是由

$$\{x - t > 0, x + t - 1 < 0, t > 0\}$$

给出的区域．假设在 D 中 u 满足

$$L[u] = u_{xx} - u_{tt} + tu_x + xu_t \geqslant 0.$$

如果 $u(x,0) \equiv 0$ 和 $u_t(x,0) \leqslant 0$，试证在 D 中 $u \leqslant 0$．如果用算子

$$\tilde{L}[u] \equiv u_{xx} - u_{tt} + tu_t$$

代替 L，同样的结论是否成立？

2．假设 u 是

$$u_{xx} - u_{tt} + u_t = 0$$

在第1题所规定的区域 D 中的解．如果 $|u(x,0)| \leqslant B$，$|u_t(x,0)| \leqslant C$，试证明在 D 中

$$|u(x,t)| \leqslant B + C(e^t - 1).$$

第三节　二维双曲型算子

现在我们把上一节的结果推广到一般的二阶算子

$$L[u] = au_{xx} + 2bu_{xt} + cu_{tt} + du_x + eu_t \qquad (1)$$

上去，其中 a,b 和 c 是 x,t 的二次连续可微函数，d 和 e 是 x,t 的连续可微函数，如果在点 (x,t)

$$b^2 - ac > 0,$$

则称 L 在这一点是**双曲型的**．如果它在区域 D 中每点都是双曲型的则称它在 D 中是双曲型的．如果存在常数 μ 使得在 D 中 $b^2 - ac \geqslant \mu > 0$，则称 L 在 D 中是**一致双曲型的**．

L 的**特征曲线**或**特征**就是常微分方程

$$c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2b\left(\frac{dx}{dt}\right) + a = 0$$

的解．解出 $\frac{dx}{dt}$，我们得到两个微分方程

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{-c}.$$

因为 L 是双曲型的，根号下的量为正，所以只要 $c \neq 0$，通过 D 中的每一点 (x,t) 相应于根式前的两个符号必存在两条特征线 C_+ 和 C_-．

我们假设 L 在半平面 $t \geqslant 0$ 中是双曲型的，并且存在常数 c_0 使得在 $t \geqslant 0$ 处有

$$c \leqslant c_0 < 0.$$

设 C 是 $t > 0$ 中的任一点，并从 C 作两条特征线到 x 轴．我们用 A 表示 C_+ 与 x 轴的交点，用 B 表示 C_- 与 x 轴的交点（见图 2）．（为了保证特征曲线 AC 和 BC 的存在性，我们假设 a,b,c 充分光滑．）

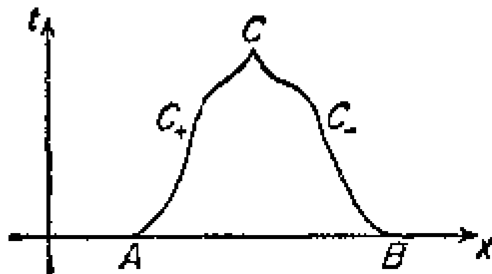


图 2

线段 AB 和两条特征线 AC，BC 构成一个（曲边）**特征三角形**.

与 L 相应的**共轭算子**是

$$L^*[v] \equiv (av)_{xx} + 2(bv)_{xt} + (cv)_{tt} - (dv)_x - (ev)_t$$
$$= av_{xx} + 2bv_{xt} + cv_{tt} + (2a_x + 2b_t - d)v_x$$
$$+ (2b_x + 2c_t - e)v_t + (a_{xx} + 2b_{xt}$$
$$+ c_{tt} - d_x - e_t)v.$$

这个算子有与 L 相同的特征曲线. 而且，它具有如下性质：任何具有二阶连续导数的函数 u,v 必满足恒等式

$$vL[u] - uL^*[v] = \frac{\partial}{\partial x}[a(vu_x - uv_x) + b(vu_t - uv_t)$$
$$- (a_x + b_t - d)uv]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t}[b(vu_x - uv_x) + c(vu_t - uv_t)$$
$$- (b_x + c_t - e)uv].$$

取 $v \equiv 1$ 并应用 Stokes 定理,我们得到

$$\iint_{ABC}(L[u] - uL^*[1])dx\,dt = \oint\{[au_x + bu_t - u(a_x$$
$$+ b_t - d)]dt - [bu_x + cu_t - u(b_x + c_t - e)]dx\}, \tag{2}$$

其中右端的积分取在曲边三角形 ABC 的边界 $ABCA$ 上.

在线段 AB 上 $dt = 0$,在 C_-特征线 BC 上

$$dx = -\frac{1}{c}(-b - \sqrt{b^2 - ac})dt,$$

所以沿 C_-

$$adt - bdx = -\sqrt{b^2 - ac}dx,$$
$$bdt - cdx = -\sqrt{b^2 - ac}dt.$$

从而

$$\int_B^C\{[au_x + bu_t]dt - [bu_x + cu_t]dx\} = -\int_B^C\sqrt{b^2 - ac}$$

$$\times(u_x dx+u_t dt)=-\sqrt{b^2-ac}\,u(C)$$

$$+\sqrt{b^2-ac}\,u(B)+\int_B^C u\frac{d}{dt}\sqrt{b^2-ac}\,dt.$$

类似有

$$\int_C^A\{[au_x+bu_t]dt-[bu_x+cu_t]dx\}=\int_C^A\sqrt{b^2-ac}$$

$$\times(u_x dx+u_t dt)=\sqrt{b^2-ac}\,u(A)-\sqrt{b^2-ac}$$

$$\times u(C)+\int_A^C u\frac{d}{dt}\sqrt{b^2-ac}\,dt.$$

把这些结果结合起来，我们就得到

$$\begin{aligned}2\sqrt{b^2-ac}\,u(C)=&\sqrt{b^2-ac}\,u(A)+\sqrt{b^2-ac}\,u(B)\\&+\int_A^C uK_+dt+\int_B^C uK_-dt\\&+\iint_{ABC}(uL^*[1]-L[u])dxdt\\&+\int_A^B[u(b_x+c_t-e)-bu_x-cu_t]dx,\end{aligned}\tag{3}$$

其中

$$\begin{aligned}K_\pm\equiv K_\pm(x,t)\equiv&(\sqrt{b^2-ac})_t+\frac{b}{c}(\sqrt{b^2-ac})_x\\&\times\frac{1}{c}(b_x+c_t-e)\sqrt{b^2-ac}\\&\pm\Big[-\frac{1}{2c}(b^2-ac)_x+a_x+b_t-d-\frac{b}{c}\\&\times(b_x+c_t-e)\Big].\end{aligned}\tag{4}$$

除双曲型算子L外再给出函数$h(x,t)$，我们希望对在以x轴的一段为部分边界的区域D中满足微分不等式$(L+h)[u]\geqslant 0$的函数u建立最大值原理。

我们假设在$t=0$上已给定u及其余法向导数

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -b\frac{\partial u}{\partial x} - c\frac{\partial u}{\partial t}.$$

我们注意到因为 $c \leqslant c_0 < 0$，所以余法向导数中 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 的系数是正的. 特别当 $b = 0$ 和 $c = -1$ 时(和上一节中一样)就有 $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial t}$.

如果上半平面 $t > 0$ 中的区域 D 具有性质：D 的每一点 C 所对应的特征三角形 ABC (AB 在 x 轴上)也在 D 中，则把它称为半平面 $t > 0$ 中的一个**容许区域**. 例如，可令 D 是 $t > 0$ 中一个特定点所对应的特征三角形. 也可令 D 是无穷长带形 $0 \leqslant t < t_0$. 更一般地，如果 D 是有限个或无穷多个特征三角形的并集，则 D 也是容许区域.

在 D 的每一点 C，我们有恒等式(3)，它可以被写成如下的形式：

$$\begin{aligned}
2\sqrt{b^2 - ac}\,u(C) &= \sqrt{b^2 - ac}\,u(A) + \sqrt{b^2 - ac}\,u(B) \\
&\quad + \int_A^C uK_+ dt + \int_B^C uK_- dt + \iint_{ABC} (u\{L^*[1] + h\} \\
&\quad - (L + h)[u])dx\,dt \\
&\quad + \int_A^B \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + (b_x + c_t - e)u\right]dx. \qquad (5)
\end{aligned}$$

现在我们假设 h 和 L 的系数具有性质：

$$K_+ \geqslant 0,\ K_- \geqslant 0,\ L^*[1] + h \geqslant 0 \quad \text{在 } D \text{ 中}, \qquad (6)$$

其中 K_+ 和 K_- 由等式(4)定义. 设 u 是满足不等式组

$$\left.\begin{aligned}
(L + h)[u] > 0 \quad &\text{在 } D \text{ 中}, \\
\frac{\partial u}{\partial \nu} + (b_x + c_t - e)u \leqslant 0 \quad &\text{在 } \Gamma_0 \text{ 上}, \\
u < 0 \quad &\text{在 } \Gamma_0 \text{ 上}
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

的任何函数，其中 Γ_0 表示位于 x 轴上的 D 的边界部分.

我们希望证明条件(6)和(7)蕴涵 $u < 0$ 在 D 中处处成立. 为

此，假设不然，于是在D中某处 $u \geqslant 0$. 设C是使$u \geqslant 0$的D的闭子集中t坐标最小的点之一，则$u(C)=0$,而在以C为顶点的特征三角形D中$u \leqslant 0$ (图 2). 应用恒等式(5)可得

$$
\begin{aligned}
O = 2\sqrt{b^2-ac}\,u(C) &= \sqrt{b^2-ac}\,u(A) + \sqrt{b^2-ac}\,u(B) \\
&+ \int_A^C uK_+ dt + \int_B^C uK_- dt + \iint_{ABC} \{u(L^*[1]+h) \\
&- (L+h)[u]\} dx\,dt + \int_A^B \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu} + (b_x + c_t - e)u \right\} dx.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

根据假设，(8)中右端每一项都非正. 而且，在D中$(L+h)[u] > 0$. 所以(8)的右端为负，与左端为零矛盾. 我们得到了在D中$u < 0$ 处处成立.

为了得出更有用的结果，我们必须放松(7)中的不等式，而用

$$
\left.
\begin{aligned}
(L+h)[u] \geqslant 0 \quad & \text{在} D \text{中}, \\
\frac{\partial u}{\partial \nu} + (b_x + c_t - e)u \leqslant 0 \quad & \text{在} \Gamma_0 \text{上}, \\
u \leqslant 0 \quad & \text{在} \Gamma_0 \text{上}
\end{aligned}
\right\}
\tag{9}
$$

来代替它们. 和第二节中用过的方法类似，我们算得

$$
(L+h)[e^{\alpha t}] = (c\alpha^2 + c\alpha + h)e^{\alpha t},
$$

$$
\frac{\partial}{\partial \nu}(e^{\alpha t}) = -c\alpha e^{\alpha t},
$$

因为$c \leqslant c_0 < 0$,我们可取α如此之大使得

$$
(L+h)[e^{\alpha t}] < 0
$$

在D的任何有界容许子区域D'中处处成立. 当α充分大时，我们还有

$$
\frac{\partial}{\partial \nu}(e^{\alpha t}) + (b_x + c_t - e)\alpha t \geqslant 0
$$

在Γ_0'(位于x轴上的D'的部分边界)上成立. 于是，对任何$\varepsilon > 0$,我们得到

$$
(L+h)[u - \varepsilon e^{\alpha t}] > 0 \quad \text{在} D' \text{中},
$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu}[u-\varepsilon e^{\alpha t}]+(b_x+c_t-e)(u-\varepsilon e^{\alpha t})\leqslant 0 \quad 在 \Gamma_0' 上,$$

$$u-\varepsilon e^{\alpha t}<0 \quad 在 \Gamma_0' 上.$$

这三个条件蕴涵着：对任何 $\varepsilon>0$，在 D' 中 $u-\varepsilon e^{\alpha t}<0$。令 $\varepsilon\to 0$ 可得在 D' 中 $u\leqslant 0$。由于 D' 是 D 的任意有界容许子区域，我们就得到了在 D 中 $u\leqslant 0$。这个论证证实了如下的最大值原理。

定理 1. 设 L 是系数有界的形为 (1) 的双曲型算子，并且 $c\leqslant c_0<0$。设 D 是一个容许区域，它在 x 轴上的边界用 Γ_0 表示。假设 h 及 L 的系数满足不等式组(6)。如果 u 在 D 中二次连续可微，在 $D\cup\Gamma_0$ 中一次连续可微，又如果 u 满足三个不等式

$$(L+h)[u]\geqslant 0 \quad 在 D 中,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}+(b_x+c_t-c)u\leqslant 0 \quad 在 \Gamma_0 上,$$

$$u\leqslant 0 \quad 在 \Gamma_0 上,$$

则在 D 中 $u\leqslant 0$。

附注. (i)从定理 1 的证明中容易看出，可以用较弱的条件：在每个底边落在 Γ_0 上的特征三角形 ABC 中

$$\iint_{ABC}(L+h)[u]\,dx\,dt\geqslant 0$$

来代替条件 $(L+h)[u]\geqslant 0$。

(ii) 由于已经得到 $u\leqslant 0$，从式(5)我们可得非负上界

$$\begin{aligned}2\sqrt{b^2-ac}\,u(C)\leqslant{}&\sqrt{b^2-ac}\,u(A)+\sqrt{b^2-ac}\,u(B)\\&-\iint_{ABC}(L+h)[u]\,dx\,dt\\&+\int_A^B\left\{\frac{\partial u}{\partial \nu}+(b_x+c_t-e)u\right\}dx.\end{aligned}\tag{10}$$

现设在 Γ_0 上 $u\leqslant M$。如果 $u-M$ 满足定理 1 的假设，我们

就可以得到u的一个最大值原理．注意到

$$(L+h)[u-M]=(L+h)[u]-hM.$$

因此，如果我们希望当在D中$(L+h)[u]\geqslant 0$时$(L+h)[u-M]$在D中非负，我们必须有

$$hM\leqslant 0 \quad \text{在} D \text{中}.$$

如果M是一个正常数，那么，必须h在D中非正，而当M是负数时，必须在D中$h\geqslant 0$．类似地，条件

$$\frac{\partial}{\partial\nu}(u-M)+(b_x+c_t-e)(u-M)\leqslant 0 \quad \text{在} \Gamma_0 \text{上}$$

可从两个条件

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}+(b_x+c_t-e)u\leqslant 0 \quad \text{在} \Gamma_0 \text{上},$$

$$-M(b_x+c_t-e)\leqslant 0 \quad \text{在} \Gamma_0 \text{上}$$

推出．这样我们就得到了定理1的如下修改．

定理 2. 设定理1的假设成立，但其中在Γ_0上$u\leqslant 0$的条件用在Γ_0上$u\leqslant M$代替．此外，如果在D中$hM\leqslant 0$以及在Γ_0上$M(b_x+c_t-e)\geqslant 0$成立，则在D中$u\leqslant M$．

附注. (i)当$M\geqslant 0$时，定理2断言u的任何非负最大值必在初始直线上达到．这个结果和椭圆型、抛物型算子的弱最大值原理十分符合．当M为负数时，对抛物型算子可用同样方法证明与以上结果类似的结论，但是对椭圆型算子类似的结论是不对的．

(ii) 和定理1后的附注(i)一样，我们可以用对D中的底边在Γ_0上的每个特征三角形ABC的积分条件$M\iint\limits_{ABC}h\,dx\,dt\leqslant\iint\limits_{ABC}(L+h)[u]\,dx\,dt$来代替条件$(L+h)[u]\geqslant 0$和$Mh\leqslant 0$．

(iii) 在定理2的假设下，我们也可把不等式(10)用于$u-M$．

定理1是颇为特别的，因为它只能用于系数满足三个不等式

(6)的算子 $L+h$. 现在我们来说明怎样把最大值原理推广到更一般的一类算子上去. 首先,我们注意到,若用一个正函数 $v(x,t)$ 去乘双曲型算子 $L+h$,则它仍然保持双曲型. 但是,这样的乘法改变了量 K_+,K_-和 $L^*[1]+h$. 而且,算子 $\frac{\partial}{\partial\nu}+(b_x+c_t-e)$ 也变了. 对于算子 $v(L+h)$,(6)的三个不等式是

$$\left.\begin{aligned}
&2\sqrt{b^2-ac}\left[v_t-\frac{1}{c}(\sqrt{b^2-ac}-b)v_x\right]+vK_+\geqslant 0,\\
&2\sqrt{b^2-ac}\left[v_t+\frac{1}{c}(\sqrt{b^2-ac}+b)v_x\right]+vK_-\geqslant 0,\\
&\qquad\qquad (L^*+h)[v]\geqslant 0.
\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

在(9)的第二个有关余法向导数的条件中出现的量 (b_x+c_t-e) 应代之以

$$(b_x+c_t-e)v-\frac{\partial v}{\partial\nu}.$$

把定理 1 用于已经乘以正函数 $v(x,t)$ 的算子 $L+h$ 上去可得出如下结论.

定理 3. 假设存在一个定义在容许区域D中的正函数 $v(x,t)$,使得由(1)给出的双曲型算子L的系数满足不等式组(11). 如果 u 满足

$$(L+h)[u]\geqslant 0\quad \text{在}D\text{中},$$

$$v\frac{\partial u}{\partial\nu}+u\left[(b_x+c_t-e)v-\frac{\partial v}{\partial\nu}\right]\leqslant 0.\quad \text{在}\ \Gamma_0\ \text{上},$$

$$u\leqslant 0\quad \text{在}\ \Gamma_0\ \text{上},$$

则在D中 $u\leqslant 0$.

附注. 用 $v(L+h)$ 代替了 $L+h$ 的不等式(10)给出了非负上界

$$u(C)\leqslant\frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}\,v(C)}[\sqrt{b^2-ac}\,vu(A)$$

$$+\sqrt{b^2-ac}\,vu(B)-\iint_{ABC} v(L+h)[u]dxdt$$

$$+\int_A^B\left\{v\frac{\partial u}{\partial \nu}+\left[(b_x+c_t-e)v-\frac{\partial v}{\partial \nu}\right]u\right\}dx\Big]. \quad (12)$$

仅当我们能够找到具有所要求的性质的函数 v 时，定理 3 才有用处．现在我们来证明在充分窄的带形 $0 \leqslant t \leqslant t_0$ 中，对任何双曲型算子 L 总存在一个满足条件组(11)的函数 v．令

$$v(x,t)=1+\alpha t-\beta t^2. \quad (13)$$

计算表明条件组(11)就是

$$\left.\begin{aligned}&2\sqrt{b^2-ac}(\alpha-2\beta t)+(1+\alpha t-\beta t^2)K_+\geqslant 0,\\&2\sqrt{b^2-ac}(\alpha-2\beta t)+(1+\alpha t-\beta t^2)K_-\geqslant 0,\\&-2c\beta+(2b_x+2c_t-e)(\alpha-2\beta t)\\&+(a_{xx}+2b_{xt}+c_{tt}-d_x-e_t+h)(1+\alpha t-\beta t^2)\geqslant 0.\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

由于假设了所有的系数以及它们出现在上面表达式中的导数有界，又因 $-c$ 和 $\sqrt{b^2-ac}$ 有正下界，所以如果选取 α 充分大可使上述的前两个表达式在 $t=0$ 为正．如果取 β 充分大又可使第三个表达式在 $t=0$ 也是正的．对这样的 α 和 β，存在数 $t_0>0$ 使得当 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 时 $v(x,t)>0$ 以及(11)的所有不等式成立．从而定理 3 在这个带形中成立．

对由(13)给出的 v，关于余法向导数的条件变成在 $t=0$ 处

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}+(b_x+c_t-e+c\alpha)u\leqslant 0.$$

如果我们选取常数 k 如此之大使得

$$k\geqslant -[b_x+c_t-e+c\alpha] \quad \text{在 } \Gamma_0 \text{ 上},$$

于是，当 $u\leqslant 0$ 时就满足定理 3 中的余法向导数条件，并且

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}-ku\leqslant 0.$$

这样我们就在紧挨着 x 轴的一个带形中得到如下的最大值原理.

定理 4. 假设由(1)给出的算子 L 的系数有界，并有有界的一、二阶导数. 设 D 是一个容许区域. 如果 t_0 和 k 按(14)和(15)被选定,那么满足

$$(L+h)[u]\geqslant 0 \quad 在D中,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}-ku\leqslant 0 \quad 在\Gamma_0上,$$

$$u\leqslant 0 \quad 在\Gamma_0上$$

的任何函数 u,也在 D 的位于带形 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 中的部分上满足 $u\leqslant 0$. 常数 t_0 和 k 只依赖于 $-c$ 和 $\sqrt{b^2-ac}$ 的下界,以及 L 的系数及其导数的界.

习　　题

1. 显式地决定"广义 Tricomi 算子"

$$L\equiv t^n\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+d\frac{\partial}{\partial x}+e\frac{\partial}{\partial t}, \quad t>0$$

的特征曲线族 C_+ 和 C_-.

2. 计算算子

$$L\equiv 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}-(1+x^2)\frac{\partial^2}{\partial t^2}-x\frac{\partial}{\partial x}+(1-t)\frac{\partial}{\partial t}$$

的量 $K_\pm$. 在半平面 $t\geqslant 0$ 中求出满足不等式组(6)的最大容许区域.

3. 证明：若 $h\geqslant 0$,则算子

$$(L+h)\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+x^2\frac{\partial}{\partial t}+h$$

处处满足不等式组(6).

4. 对算子

$$(L+h)\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}-1,$$

当 $t_0<\pi/2$ 时构造一个满足不等式组(11)的函数 v.

第四节　初值问题解的估计和唯一性

我们考虑确定满足下列条件的函数 $w(x,t)$ 的问题

$$\left.\begin{aligned} (L+h)[w] &\equiv aw_{xx}+2bw_{xt}+cw_{tt}+dw_x \\ &\quad +ew_t+hw=f(x) \quad 在 D 中, \\ w(x,0) &= g(x) \quad 在 \Gamma_0 上, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} &\equiv -bw_x-cw_t=\gamma(x) \quad 在 \Gamma_0 上. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

寻求满足条件组(1)的函数的问题被称为对 w 的初值问题或 Cauchy 问题. 假设我们能够找到函数 $w_1(x,t)$,它满足

$$\left.\begin{aligned} (L+h)[w_1] &\leqslant f(x) \quad 在 D 中, \\ w_1(x,0) &\geqslant g(x) \quad 在 \Gamma_0 上, \\ \frac{\partial w_1}{\partial \nu}-kw_1 &\geqslant \gamma(x)-kg(x) \quad 在 \Gamma_0 上, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中 k 是由第三节中不等式(15)给出的常数. 如果 w 满足(1),又若 w_1 满足(2),我们可把定理 4 用于 $w-w_1$,并得到在 D' 中

$$w(x,t) \leqslant w_1(x,t), \tag{3}$$

D' 是位于带形 $0 \leqslant t \leqslant t_0$ 中的 D 的容许子区域. 类似地, 若 $w_2(x,t)$ 满足

$$\begin{aligned} (L+h)[w_2] &\geqslant f \quad 在 D 中, \\ w_2 &\leqslant g \quad 在 \Gamma_0 上, \\ \frac{\partial w_2}{\partial \nu}-kw_2 &\leqslant \gamma(x)-kg(x) \quad 在 \Gamma_0 上, \end{aligned}$$

则在 D' 中

$$w_2(x,t) \leqslant w(x,t). \tag{4}$$

不等式(3)和(4)表明问题(1)至多有一个解. 因为,如果存在两个解 w 和 $\bar{w}$,那么我们把(2)用于两个解就可得到 $\bar{w} \leqslant w \leqslant \bar{w}$,所以对 $0 \leqslant t \leqslant t_0$ 有 $w \equiv \bar{w}$. 现在我们建立一个当 $t=t_0$ 时 $w=$

$\bar{w}$和在 $t=t_0$ 上 $\frac{\partial w}{\partial \nu}=\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu}$ 的新的初值问题. 再应用(2)又可得到当 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 时 $w=\bar{w}$. 这样继续下去,就能得到在D中 $w=\bar{w}$ 处处成立. 我们得到结论: 初值问题(1)至多有一个解.

利用最大值原理, 我们可以得到一个由L的系数和给定函数 f, g, h 和 γ 的界表出的(1)的解的界. 首先选取正常数 ρ 如此之大,使得下列不等式成立

$$\left.\begin{aligned}2(-c)\rho^2e^{2\rho t}\geqslant 1\\(-c)\rho-e\geqslant 0\\(-c)\rho^2-e\rho-h\geqslant 0\end{aligned}\right\}\text{当 } 0\leqslant t\leqslant t_0 \text{ 时},$$

$$(-c)\rho\geqslant k\quad \text{当 } t=0 \text{ 时},$$

$$(-c)\rho\geqslant 1\quad \text{当 } t=0 \text{ 时},$$

其中 t_0 和 k 是在定理 4 中出现的常数. 于是由计算表明

$$(L+h)[e^{\rho t}]\leqslant 0\quad \text{当 } 0\leqslant t\leqslant t_0 \text{ 时},$$

$$(L+h)[e^{\rho t}-1]\leqslant 0\quad \text{当 } 0\leqslant t\leqslant t_0 \text{ 时},$$

$$(L+h)[(e^{\rho t}-1)^2]=(e^{\rho t}-1)^2(c\rho^2+e\rho+h)$$
$$+(e^{2\rho t}-1)(c\rho^2+e\rho)+2c\rho^2e^{\rho t}\leqslant -1$$
$$\text{当 } 0\leqslant t\leqslant t_0 \text{ 时},$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(e^{\rho t})-k(e^{\rho t})\geqslant 0\quad \text{当 } t=0 \text{ 时},$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(e^{\rho t}-1)-k(e^{\rho t}-1)\geqslant 1\quad \text{当 } t=0 \text{ 时}.$$

我们选取常数 M_1, M_2 和 M_3 使得

$$|f|\leqslant M_1,\quad |g|\leqslant M_2,\quad |\gamma(x)-kg(x)|\leqslant M_3,$$

并把定理 4 用于函数 $\pm w-M_1(e^{\rho t}-1)^2-M_2e^{\rho t}-M_3(e^{\rho t}-1)$,就能得到估计

$$|w(x,t)|\leqslant M_1(e^{\rho t}-1)^2+M_2e^{\rho t}+M_3(e^{\rho t}-1)\quad \text{在 } D' \text{ 中},$$

此处 D' 是包含在带形 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 中的任何容许区域.

如果使用比 $e^{\rho t}$ 更复杂的函数以及利用第三节的不等式 (10) 和(12),还可以得到更好的界.

习　　题

1. 证明问题(1)的解有如下性质：如果 f, g 和 γ 仅有微小的改变，那么解也只有微小的改变.

2. 设 D 是区域

$$\{x-t>0,\ x+t-2<0,\ t>0\}.$$

又设 u 是问题

$$u_{xx}-u_{tt}+xu_x-tu_t=0,$$
$$u(x,0)=1+x^2,\ 0\leqslant x\leqslant 2,$$
$$u_t(x,0)=0,\ 0\leqslant x\leqslant 2$$

的解. 试求出 u 在 D 中的形为 $Me^{\mu t}$ 的界.

3. 试证明怎样得到常数 K，使得从不等式

$$|(L+h)[u]|\leqslant A \quad \text{在 } D \text{ 中}$$
$$|u(x,0)|\leqslant B,\quad \left|\frac{\partial u(x,0)}{\partial \nu}\right|\leqslant C$$

可推出在 D 中

$$|u|\leqslant K(A+B+C),$$

其中 D 是带形 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 中的有界容许区域.

第五节　Riemann 函数

假设对应于容许区域的每一点 C 我们可以求得一个定义在特征三角形 ABC 的闭包上的函数 $R(C;x,t)$，它满足如下条件

$$\left.\begin{aligned}
&(L^*+h)[R]=0 \quad \text{在 } ABC \text{ 中},\\
&2\sqrt{b^2-ac}\left[R_t-\frac{1}{c}(-b+\sqrt{b^2-ac})R_x\right]+K_+R=0\\
&\qquad \text{在 } AC \text{ 上},\\
&2\sqrt{b^2-ac}\left[R_t-\frac{1}{c}(-b-\sqrt{b^2-ac})R_x\right]+K_-R=0\\
&\qquad \text{在 } BC \text{ 上},\\
&2\sqrt{b^2-ac}\,R(C)=1.
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

用 $R(L+h)$ 代替 $L+h$ 后，第三节的公式(5)给出表达式

$$u(C)=\sqrt{b^2-ac}\,Ru(A)+\sqrt{b^2-ac}\,Ru(B)$$

$$-\iint_{ABC}R(L+h)[u]dxdt+\int_A^B\{u[bR_x$$

$$+cR_t+(b_x+c_t-e)R]-R[bu_x+cu_t]\}dx. \tag{2}$$

因为(2)的右端正好包含第四节初值问题(1)中的给定数据，所以对于$u(C)$的这个公式就是该问题的一个显式解.我们把函数$R(C;x,t)$称为算子$L+h$初值问题的 Riemann 函数(或辐射核).

从式(2)显然可得，当且仅当在D的每个特征三角形ABC中

$$R>0$$

以及在Γ_0上

$$\frac{\partial R}{\partial \nu}=-bR_x-cR_t\leqslant 0 \tag{3}$$

时,定理 1 中所说的最大值原理才成立.

更一般地,我们看出当且仅当在每个特征三角形中

$$R>0$$

以及在Γ_0上

$$v\frac{\partial R}{\partial \nu}\leqslant R\frac{\partial v}{\partial \nu} \tag{4}$$

时,对于给定的函数v定理 3 的结论成立. 特别是,满足第三节不等式组(11)的正函数v仅当在每个三角形ABC中$R>0$时才能存在. 另一方面,如果在每个三角形ABC中$R>0$,则函数R本身就满足对v的要求,所以定理 3 至少对一个函数v是成立的.

现在假设 Riemann 函数$R(C;x,t)$存在,并假设v是满足第三节不等式组(11)的任一函数. 设$u(x,0)=\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial \nu}=0$,并且把上面的表达式(2)与第三节的当$(L+h)[u]\geqslant 0$时成立的不等式(12)相比较,我们看出

$$\frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}\,v(C)}v(x,t)\leqslant R(C;x,t). \tag{5}$$

因此，在曲线三角形 ABC 的每一点上 Riemann 函数是满足第三节中不等式组(11)的并且已经正则化使得 $2\sqrt{b^2-ac}\,v(C)=1$ 的所有正函数 v 的最大值.

现在我们回到不等式(4). 注意到对 R 的条件组(1)和第三节中对 v 的条件组(11)都不包含初始直线 $t=0$. 因而我们可以用点 C 以下的任何别的初始时刻. 由此得出在特征三角形 ABC 中不等式处处成立.

$$v(-bR_x - cR_t) \leqslant R(-bv_x - cv_t)$$

更一般地，如果从特征线 AC 延伸到特征线 BC 的弧 Γ 具有如下性质：它与任一特征线相交不超过一次，我们就可在任一这样的弧 Γ 上给出初值. 通过在表达式(2)中用沿 Γ 的积分代替沿 AB 的积分的类似的表达式，利用 R 就可解出这个初值问题. 通过引进新坐标系 (ξ,τ) 使 Γ 具有方程 $\tau=0$ 能够建立最大值原理. 把不等式(4)应用到这样的曲线 Γ 上就证明了：沿三角形 ABC 中的任一特征，比值 R/v 是 t 的非增函数.

现在我们注意在(1)中关于 R 的第二和第三个等式分别只包含沿 AC 和 BC 的方向导数. 它们可被写成下面的形式

$$\frac{d}{dt}\log R = -K_+/2\sqrt{b^2-ac} \quad \text{在 } AC \text{ 上,}$$

$$\frac{d}{dt}\log R = -K_-/2\sqrt{b^2-ac} \quad \text{在 } BC \text{ 上,}$$

其中 d/dt 在每种情形中都表示全导数. 一旦特征线 AC 和 BC 已知，我们就可以利用初条件 $2\sqrt{b^2-ac}\,R(C)=1$ 沿着 AC 和 BC 积分这些方程来确定 R.

于是沿每条特征线 R/v 是 t 的非增函数这一事实，通过在三角形 ABC 的每一点上的 v 给出了 R 的一个下界. 一般说来这个下界比起(5)来是个改进. 把这个改进了的界和不等式(4)代入表达式(2)，我们对 $u(C)$ 就得到了比由第三节中(12)给出的估计更好的估计.

习 题

1.证明波动算子

$$L\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

在任何点C的 Riemann 函数是$R\equiv\frac{1}{2}$.

2.证明函数

$$R(\xi,\tau;x,t)=\frac{1}{2}J_0(\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2})$$

(J_0是零阶 Bessel 函数)是算子

$$L+h\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}-1$$

的 Riemann 函数.

第六节 初边值问题

到现在为止我们已经讨论了初值问题.在实践中常常出现这样的问题:除在x轴的有限区间上给了函数u的初值和导数外,我们还在这个区间的端点上规定了u或者u的导数.例如,在弦振动的情形,我们规定端点是固定的或者它们按照给定的规律运动.给定了这样数据的问题称为初边值问题.

我们在区域

$$D:\ x_1<x<x_2,\ 0<t<T$$

中考虑双曲型微分方程

$$(L+h)[u]\equiv au_{xx}+2bu_{xt}+cu_{tt}+du_x+eu_t+hu=f.\quad(1)$$

给定的初值是

$$\left.\begin{aligned}&u(x,0)=g_1(x) &&\text{当 } x_1<x<x_2\text{ 时},\\&\frac{\partial u}{\partial v}(x,0)\equiv-bu_x-cu_t=g_2(x) &&\text{当 } x_1<x<x_2\text{ 时},\end{aligned}\right\}(2)$$

边界条件是

$$\left.\begin{aligned}&u(x_1,t)=0\quad\text{当 } 0<t<T\text{ 时},\\&u(x_2,t)=0\quad\text{当 } 0<t<T\text{ 时},\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

(见图 3)．我们也可以规定 $u(x_1, t)$ 和 $u(x_2, t)$ 非零，在这种情形只要简单地定义一个新函数

$$\bar{u}(x,t)=u(x,t)-u(x_1,t)-\frac{x-x_1}{x_2-x_1}[u(x_2,t)-u(x_1,t)],$$

带有非零数据的问题就化成函数 $\bar{u}$ 的满足(2)，(3)形式初值和边界条件的问题了．

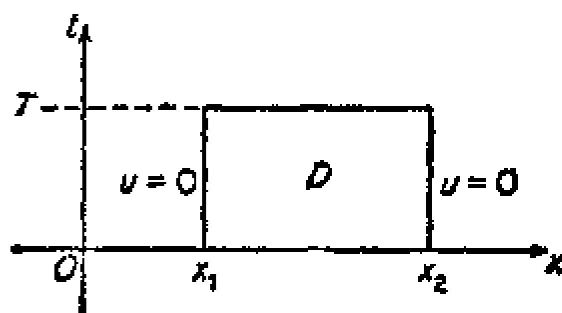


图 3

我们假设在D中

$$a(x_1,0)>0,\ a(x_2,0)>0$$

以及 $c(x, t)\leqslant c_0<0$．如果 C_+和 C_-是从边界 $x=x_1$ 上的点进入D的特征，则 t 沿特征 C_+增加，而沿特征 C_-减少．对从边界 $x=x_2$ 上的点进入D的特征，情形正好相反．由于在D中存在着这样的点，通过它的 C_+特征的端点落在直线 $x=x_1$ 上，所以如果我们把直线 $t=0$ 取作 Γ_0，D就不是第三节意义下的容许区域了．另一方面，在直线 $x=x_1$ 上，我们知道 u 但不知道它的导数，因而，如果我们把 $x=x_1$ 作为 Γ_0 的一部分就不能应用最大值原理．

为此我们要利用如下的技巧．在区间 $x_1<x<x_2$ 之外，用反射法把 u 定义成关于 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 的奇函数．也就是说，我们令

$$u(x,t)=-u(2x_1-x,t)\quad 当\ 2x_1-x_2<x<x_1\ 时,$$
$$u(x,t)=-u(2x_2-x,t)\quad 当\ x_2<x<2x_2-x_1\ 时,$$

此外，更一般地，对 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 当 $2x_1-x_2+2n(x_2-x_1)\leqslant x\leqslant 2x_1-x_2+2(n+1)(x_2-x_1)$ 时定义

$$u(x,t)=u(x-2n(x_2-x_1),t).$$

为使 u 仍然满足微分方程(1),我们用反射法把 a,c,e 和 h 延拓成偶函数,即

$$a(x,t)=a(2x_1-x,t)\quad 当\ 2x_1-x_2<x<x_1\ 时,$$

$$a(x,t)=a(x-2n(x_2-x_1),\ t)$$

当 $2x_1-x_2+2n(x_2-x_1)<x<2x_1-x_2+2(n+1)(x_2-x_1)$,等等,把 b,d,f,g_1 和 g_2 延拓成奇函数:

$$b(x,t)=-b(2x_1-x,\ t)\ 当\ 2x_1-x_2<x<x_1\ 时,$$

$$b(x,t)=b(x-2n(x_2-x_1),\ t)$$

当 $2x_1-x_2+2n(x_2-x_1)<x<2x_1-x_2+2(n+1)(x_2-x_1)$,等等.

为使 L 的共轭算子 L^* 也有有界系数,我们加上如下的要求:在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 上

$$a_x=c_x=b=d=0.$$

此外,我们还要求

$$g_1(x_1)=g_2(x_1)=g_1(x_2)=g_2(x_2)=0.$$

于是,延拓后的函数 u 在容许区域 $-\infty<x<\infty,\ 0<t<T$ 中满足微分方程 $L[u]=f$. 当 f,g_1 和 g_2 延拓成奇函数时,条件 $(L+h)[u]\geqslant 0, u(x,0)\leqslant 0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial v}+(b_x+c_t-e)u\leqslant 0$ 并不保持,但是,我们能够象第四节中那样运用第三节的最大值原理来得到初-边值问题解的唯一性定理和估计.(Sather [4] 已经给出定理 1 在初边值问题上的更直接的推广,不过结论仅在受到限制的 t 区间上成立.)

如果在一条或两条边界 $x=x_1,\ x=x_2$ 上,不是加 $u=0$ 而是加上 $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ 的条件,我们就不把 u 延拓成奇函数,而把它简单地延拓成偶函数. 系数仍如前延拓,解的唯一性和估计也能象第四节中那样地得到。

习　　题

假设由(1)给出的算子 $L+h$ 具有常系数．如果 f，g_1 和 g_2 也是常数，是否总能够应用本节的方法？说明理由．

第七节　级数解的估计

双曲型微分方程

$$L[u]\equiv u_{xx}-u_{tt}-2tu_t=0 \tag{1}$$

显然有乘积形式的解

$$u(x,t)=\cos\alpha x\phi_{\alpha^2}(t),$$

其中 α 是任意常数，$\phi_{\alpha^2}(t)$ 是常微分方程

$$\phi''_{\alpha^2}+2t\phi'_{\alpha^2}+\alpha^2\phi_{\alpha^2}=0 \tag{2}$$

的任一解．如果 $\alpha^2=4k+2$，k 是整数，容易看出这个微分方程有解 $(d/dt)^{2k}[e^{-t^2}]$，它是 t 的偶函数．如果我们加上初始条件

$$\phi_{4k+2}(0)=1,\quad \phi'_{4k+2}(0)=0,$$

就能把解写成如下形式

$$\phi_{4k+2}(t)=\frac{(-1)^k k!}{(2k)!}H_{2k}(t)e^{-t^2},$$

其中 $H_{2k}(t)$ 是 Hermite 多项式

$$H_{2k}(t)=e^{t^2}\left(-\frac{d}{dt}\right)^{2k}[e^{-t^2}].$$

我们看到函数

$$u(x,t)=\frac{(-1)^k k!}{(2k)!}\cos\sqrt{4k+2}\,xH_{2k}(t)e^{-t^2} \tag{3}$$

是问题

$$\begin{gathered}L[u]=u_{xx}-u_{tt}-2tu_t=0,\\ u(x,0)=\cos\sqrt{4k+2}\,x,\\ u_t(x,0)=0\end{gathered} \tag{4}$$

的解．对上面的算子 L，容易算出 $K_+=K_-=-2t$，所以定理 1

中条件 $K_{\pm} \geqslant 0$ 被破坏．但是，如果我们设 $v = e^{t^2/2}$ 可得

$$2\sqrt{b^2 - ac}\,(v_t \pm v_x) + K_{\pm} v = 0$$

以及

$$L^*[v] = v_{xx} - v_{tt} + 2tv_t + 2v = (t^2 + 1)e^{t^2/2} > 0,$$

所以满足定理 3 的条件组(11)．而且，在 $t = 0$ 上

$$(b_x + c_t - e)v - \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0,$$

所以定理 3 关于 u 的条件变成

$$L[u] \geqslant 0 \quad 在 D 中,$$

$$u \leqslant 0 \quad 当 t = 0 时,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \leqslant 0 \quad 当 t = 0 时.$$

我们注意到当 u 用(3)给出时，函数 $u - 1$ 和 $-u - 1$ 也满足这些条件．于是从定理 3 可得到 $|u| \leqslant 1$ 处处成立．特别，令 $x = 0$，我们就得到 Hermite 多项式的一个界

$$|H_{2k}(t)| \leqslant \frac{(2k)!}{k!} e^{t^2}.$$

如果我们把注意力限于特征三角形 $t + |x| < t_0$，$t > 0$，而且 $\sqrt{4k+2}\ t_0 < \pi$，我们注意到在 $t = 0$ 上 $\cos\sqrt{4k+2}\ t_0 - u \leqslant 0$．由此可得在这个三角形中 $u \geqslant \cos\sqrt{4k+2}\ t_0$．令 $x = 0$ 并令 t 趋向 t_0，我们就得到下界

$$\frac{(-1)^k k!}{(2k)!} H_{2k}(t_0) \geqslant e^{t_0^2} \cos\sqrt{4k+2}\ t_0, 当 0 \leqslant t_0 \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{4k+2}} 时.$$

现在我们考虑初-边值问题

$$u_{xx} - u_{tt} - 2tu_t = 0 \quad 当 0 < x < \frac{\pi}{2\sqrt{2}},\ t > 0 时,$$

$$u_x(0, t) = 0,$$

$$u\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, t\right) = 0,$$

$$u(x,0)=f(x),$$
$$u_t(x,0)=0.$$

用分离变量法可得到解

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{[2n(n+1)]!}{[4n(n+1)]!}H_{4n(n+1)}(t)e^{-t^2}\cos\sqrt{2}(2n+1)x,$$

其中 a_n 是 Fourier 系数

$$a_n=\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi/(2\sqrt{2})}f(x)\cos\sqrt{2}(2n+1)x\,dx.$$

为了研究这个级数解的收敛性，我们注意到可以把定理 3 应用到任意的有限和

$$\sum_{n=M+1}^{N}a_n\frac{[2n(n+1)]!}{[4n(n+1)]!}H_{4n(n+1)}(t)e^{-t^2}\cos\sqrt{2}(2n+1)x$$

上去，该有限和到处是微分方程的解，它对 t 的导数又在 $t=0$ 上为零。我们看到

$$\left|\sum_{n=M+1}^{N}a_n\frac{[2n(n+1)]!}{[4n(n+1)]!}H_{4n(n+1)}(t)e^{-t^2}\cos\sqrt{2}(2n+1)x\right|$$
$$\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant\pi/(2\sqrt{2})}\left|\sum_{M+1}^{N}a_n\cos\sqrt{2}(2n+1)x\right|. \qquad (5)$$

现在假设 Fourier 级数 $\sum a_n\cos\sqrt{2}\,(2n+1)x$ 一致收敛于 $f(x)$。于是，对任给的 $\varepsilon>0$ 存在 M_ε 使得当 $M\geqslant M_\varepsilon$ 时

$$\left|f(x)-\sum_{0}^{M}a_n\cos\sqrt{2}(2n+1)x\right|<\varepsilon.$$

由此推出当 $N>M\geqslant M_\varepsilon$ 时

$$\left|\sum_{M+1}^{N}a_n\cos\sqrt{2}(2n+1)x\right|<2\varepsilon.$$

所以由上面的不等式(5)，当 $N>M\geqslant M_\varepsilon$ 时就有

$$\left|\sum_{M+1}^{N}a_n\frac{[2n(n+1)]!}{[4n(n+1)]!}H_{4n(n+1)}(t)e^{-t^2}\cos\sqrt{2}(2n+1)x\right|<2\varepsilon.$$

换句话说，当 $f(x)$ 的级数一致收敛时，$u(x,t)$ 的级数解也是一致收敛的。令 $N\to\infty$，我们就得到用有限部分和来代替 $u(x,t)$ 时误差的界

$$\left|u(x,t)-\sum_{0}^{M}a_n\frac{[2n(n+1)]!}{[4n(n+1)]!}H_{4n(n+1)}(t)e^{-t^2}\cos\sqrt{2}\,(2n+1)x\right|$$

$$\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant\pi/(2\sqrt{2})}\left|f(x)-\sum_{0}^{M}a_n\cos\sqrt{2}\,(2n+1)x\right|.$$

上面的方法当然也能够用到有乘积形式解的很多偏微分方程上去。某些重级数收敛性方面的有关结果可参阅 Weinberger[2]。

习　　题

1. 证明当 $e(0)=0$ 且当 $t>0$，函数 $(1/e)+\frac{1}{2}t$ 非减时，初值问题

$$\phi''-e(t)\phi'+\phi=0,$$
$$\phi(0)=1,\phi'(0)=0$$

的解 $\phi(t)$ 满足不等式 $|\phi(t)|\leqslant1$。

2. 证明第1题中的条件 $e'(0)=0$ 可用 $e(0)\geqslant0$ 来代替。

第八节　双特征问题

在第三节和第六节中我们讨论了初值问题和初边值混合问题。这两种情形下，都在 x 轴的线段 Γ_0 上规定了函数 u 及其一阶导数。我们能把这些结果推广到 Γ_0 是更一般的曲线的情形上去。为此，只需适当地定义容许区域。

设曲线 Γ 能被写成参数形式

$$\Gamma:\ x=x(\sigma),\ t=t(\sigma).$$

如果在 Γ 的每一点上方程

$$a\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2-2b\,\frac{dt}{d\sigma}\cdot\frac{dx}{d\sigma}+c\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2=0,$$

则 Γ 是双曲型算子

$$L[u] = au_{xx} + 2bu_{xt} + cu_{tt} + du_x + eu_t \tag{1}$$

的特征线．由二次公式，特征线满足的微分方程可以写成如下的两种形式：

$$\left.\begin{aligned} a\frac{dt}{d\sigma} - (b \pm \sqrt{b^2 - ac})\frac{dx}{d\sigma} = 0, \\ c\frac{dx}{d\sigma} + (-b \pm \sqrt{b^2 - ac})\frac{dt}{d\sigma} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

除 Γ 上使这些方程之一中 $dt/d\sigma$ 和 $dx/d\sigma$ 的系数同时为零的点外，形式(2)的两个方程是等价的．方程(2)给出两族特征线，每族对应于一种选定的符号． 用加号得到的那些特征线称为 C_+特征线．用减号得到的那些特征线称为 C_-特征线．

假设已给一条曲线 Γ_0． 如果区域 D 的每一点 C 对应着唯一的(曲线)特征三角形，它由在 C 点相交的 C_+特征线，C_-特征线以及曲线 Γ_0 的一段 AB 围成（见图 4)，则把区域 D 称为关于算子(1)和 Γ_0 的一个容许区域．特别是，在 D 中没有特征线能够与 Γ_0 相交两次．

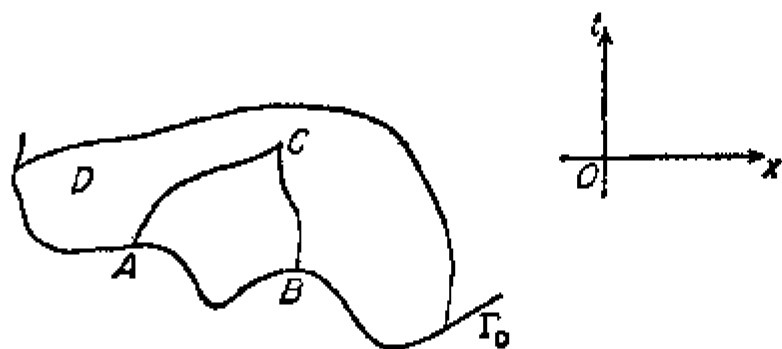


图 4

从 Γ_0 进入 D 的每条特征线都有以 σ 为参数的参数表达式．我们选取 σ 使得从 Γ_0 进入 D 时它是增加的． 现在我们对通过 D 的每一点 C 的特征线作下面的几何假设．我们假设沿 C_+和 C_-特征线从 Γ_0 走向 D 的任何点 C 时，点 C 对应的特征三角形 ABC 总是位于它边界上 C_+特征线的右方，C_-特征线的左方．因此，在图 4

中 AC 是 C_-特征，BC 是 C_-特征．这个几何假设代替了第三节中所作的 $c<0$ 的假设．因为用 $-L$ 代替 L 时 C_+和 C_-特征要互相交换，所以如果有必要的话，用$-(L+h)$代替算子$(L+h)$就容易使这个假设得到满足．

我们可以重复第三节的方法，在关于 u 及其一阶导数沿 Γ_0 的具有类似于定理 1 到定理 4 中给出的那些性质的假设之下建立最大值原理．

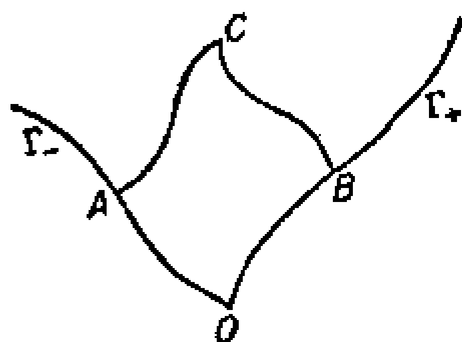


图 5

在本节中，我们只讨论 Γ_0是由从一点 O 出发的两条特征线 Γ_- 和 Γ_+组成的这种特殊情形(见图 5)．按照上面所给的关于两族特征线的几何假设，我们知道 Γ_+是一条 C_+特征线，Γ_-是一条 C_-特征线．我们考虑由(1)给出的双曲型算子 L 及其共轭算子 L^*，而且我们将要利用第三节的公式(2)．

设 C 是D的一点，弧 AC 是一条 C_+特征线，BC 是一条 C_-特征线，又假设曲线四边形 $AOBC$ 完全落在D中（图 5)．我们用参数形式

$$x=x(\sigma),\quad t=t(\sigma)$$

(设 σ 沿从 O 到 C的方向增加)来刻划四条弧 OA，AC，OB 以及 BC 中的每一条．遵循第三节的方法，由该节的(2)以及 AC 是 C_+特征线，BC 是 C_-特征线的假设，我们得到公式

$$2\sqrt{b^2-ac}\,u(C)=2\sqrt{b^2-ac}\,u(O)+\int_A^C u\widetilde{K}_+d\sigma_+$$

$$+\int_B^C u\widetilde{K}_-d\sigma_-+\iint_{AOBC}\{u(L^*+h)[l]$$

$$-(L+h)[u]\}\,dx\,dt+\int_0^A\left\{2\sqrt{b^2-ac}\,\frac{du}{d\sigma_-}+K_-^*u\right\}d\sigma_-+\int_0^B\left\{2\sqrt{b^2-ac}\,\frac{du}{d\sigma_+}+K_+^*u\right\}d\sigma_+. \tag{3}$$

在上式中我们用了省略记法：

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{K}_\pm&=\frac{d}{d\sigma_\pm}(\sqrt{b^2-ac})\pm\Big[(a_x+b_t-d)\frac{dt}{d\sigma_\pm}\\&\quad-(b_x+c_t-e)\frac{dx}{d\sigma_\pm}\Big],\\K_\pm^*&=\frac{d}{d\sigma_\pm}(\sqrt{b^2-ac})\mp\Big[(a_x+b_t-d)\frac{dt}{d\sigma_\pm}\\&\quad-(b_x+c_t-e)\frac{dx}{d\sigma_\pm}\Big],\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

并且用 σ_+ 表示 C_+ 特征线上的参数，用 σ_- 表示 C_- 特定线上的参数．量 $\widetilde{K}_\pm$ 与 $K_\pm$ 的关系由公式 $\widetilde{K}_\pm=K_\pm\,dt/d\sigma_\pm$ 表出，其中 $K_\pm$ 是第三节中用等式(4)定义的．(3)中的线积分与所用的特定参数 σ_+,σ_- 无关．从 O 指向 C 时每个参数都是增加的．

现在，我们对满足不等式组

$$\left.\begin{aligned}&(L+h)[u]>0\quad 在D中,\\&u<0\quad 在\Gamma_+和\Gamma_-上,\\&2\sqrt{b^2-ac}\,\frac{du}{d\sigma_-}+K_+^*u\leqslant 0\quad 在\Gamma_+上,\\&2\sqrt{b^2-ac}\,\frac{du}{d\sigma_-}+K_-^*u\leqslant 0\quad 在\Gamma_-上\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

的函数 u 在 D 中建立最大值原理．我们假设算子 L 的系数在 D 中满足以下的不等式组

$$\left.\begin{aligned}&(L^*+h)[1]\geqslant 0,\\&\widetilde{K}_+\geqslant 0,\ \widetilde{K}_-\geqslant 0,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中 $\widetilde{K}_\pm$ 由(4)定义．

为证实这个最大值原理的论证，可以和前面同样地进行．我

们在Γ_+和Γ_-上有$u<0$. 如果假设在D中某处$u\geqslant 0$, 将会导致矛盾. 设C是D中使得$u(C)=0$的一个点，而且在由特征线围成的曲线四边形$AOBC$中$u\leqslant 0$(图5). 把不等式组(5)和(6)代入(3)即可证明必有$u(C)<0$, 得出了矛盾. 所以$u<0$在D中处处成立. 和第三节中一样,我们可把不等式$(L+h)[u]>0$和$u<0$放宽为$(L+h)[u]\geqslant 0$和$u\leqslant 0$. 我们注意到如果$u(O)\leqslant 0$, (5)中后两个不等式蕴涵着在Γ_+和Γ_-上$u\leqslant 0$. 这样我们就得到了下面的定理.

定理 5. 设L是关于两条特征弧Γ_+和Γ_-的容许区域D中的双曲型算子. 如果L的系数满足不等式组(6),又若u满足不等式组

$$(L+h)[u]\geqslant 0 \quad 在D中,$$

$$2\sqrt{b^2-ac}\,\frac{du}{d\sigma_+}+K_+^*u\leqslant 0 \quad 在\Gamma_+上,$$

$$2\sqrt{b^2-ac}\,\frac{du}{d\sigma_-}+K_-^*u\leqslant 0 \quad 在\Gamma_-上,$$

$$u(O)\leqslant 0,$$

其中$\tilde{K}_\pm$和$K_\pm^*$由等式(4)定义，而O是Γ_+和Γ_-的交点，那么在D中

$$u\leqslant 0.$$

定理5对于在Γ_+和Γ_-上非正的函数成立. 如果u在Γ_+和Γ_-上被某正常数M界住，我们可把定理5用于函数$u-M$, 并得出下面的结果.

定理 6. 如果双曲型算子L的系数在容许区域D中满足不等式组(6),如果在D中$h\leqslant 0$, 在Γ_+上$K_+^*\geqslant 0$, 在Γ_-上$K_-^*\geqslant 0$, 又如果u满足不等式组

$$(L+h)[u]\geqslant 0 \quad 在D中,$$

$$2\sqrt{b^2-ac}\,\frac{du}{d\sigma_+}+K_+^*u\leqslant 0 \quad 在\Gamma_+上,$$

$$2\sqrt{b^2-ac}\frac{du}{d\sigma_-}+K_-^*u\leqslant 0\quad 在\Gamma_-上,$$

$$u(O)\leqslant M,$$

其中 $M\geqslant 0$,则在D中

$$u\leqslant M.$$

我们看到,如果在Γ_+上$K_+^*\geqslant 0$以及$u(O)\leqslant 0$,则在Γ_+上的不等式$\frac{du}{d\sigma_+}\leqslant 0$就蕴涵着定理5中在$\Gamma_+$上的条件. 如果$K_-^*\geqslant 0$,类似的结果在$\Gamma_-$上也正确. 当$h\leqslant 0$时我们把这些事实用于$u-M$,在定理6关于系数所作的假设下就能够得到另一个定理.

定理 6′. 假设在关于两条特征线Γ_+和Γ_-的容许区域D中L的系数满足不等式组(6). 又设

$$h\leqslant 0\ 在D中,\ K_+^*\geqslant 0\ 在\Gamma_+上,\ K_-^*\geqslant 0\ 在\Gamma_-上.$$

如果u满足不等式组

$$(L+h)[u]\geqslant 0\quad 在D中,$$

$$\frac{du}{d\sigma_+}\leqslant 0\quad 在\Gamma_+上,\quad \frac{du}{d\sigma_-}\leqslant 0\quad 在\Gamma_-上,$$

那么在D中

$$u(x,t)\leqslant \max(0,u(O)),$$

其中O是Γ_+和Γ_-的交点. 而且,如果在D中$h\equiv 0$,则$u(x,t)\leqslant u(O)$.

为把定理5,6和6′中包含的想法结合起来,我们来介绍一个特殊情形. 考虑算子

$$L_1[u]\equiv -u_{xt}+du_x+cu_t \tag{7}$$

并以正x轴作为Γ_+,以正t轴作为Γ_-. L_1中第一个系数的符号的选择是为了使得Γ_+是C_+特征线,而Γ_-是C_-特征线(见图6). 在C_+特征线$t=$常数上取参数$\sigma_+=x$,在C_-特征线$x=$常数上取参数$\sigma_-=t$. 在算子(7)这种特殊情况下,不等式组(6)变成了

$$\left.\begin{aligned}&L^*[1]\equiv -d_x-c_t\geqslant 0,\\&\tilde{K}_+\equiv c\geqslant 0,\quad \tilde{K}_-\equiv d\geqslant 0.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

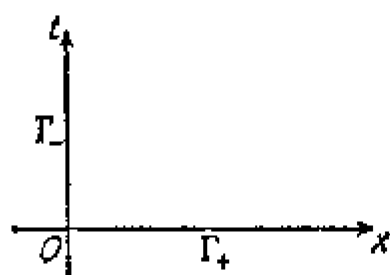


图 6

对应地，我们求得 $K_+^* = -e$, $K_-^* = -d$. 把定理 5 用于算子(7)就给出下面的最大值原理：如果当 $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ 时 d 和 e 满足不等式组(8)，而且如果 u 满足

$$\left.\begin{aligned} L_1[u] \geqslant 0 \quad \text{在}D\text{中}, \\ u_x(x,0) - e(x,0)u(x,0) \leqslant 0, \\ u_t(0,t) - d(0,t)u(0,t) \leqslant 0, \\ u(0,0) \leqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

那么，当 $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ 时就有

$$u(x,t) \leqslant 0.$$

因为 $d \geqslant 0$ 和 $e \geqslant 0$，所以当且仅当 $d(0,t)$ 和 $e(x,0)$ 恒等于零时才可应用定理 6 和 6′. 在这种情形下，定理 6 和 6′ 是完全一样的.

只要算子的系数满足某个不等式组，在第三节中我们得到了初值问题的最大值原理. 用正函数 v 乘以给定的算子 $(L+h)$，然后选择 v 使 L 的系数满足适当的不等式组，就可以放宽这些限制. 完全类似的过程也可以应用到双特征问题上来.

如果 D 关于两条特征线 Γ_+ 和 Γ_- 是一个容许区域，我们用正函数 v 乘以 $(L+h)$，并注意到不等式组(6)现在变成了

$$\left.\begin{aligned} (L^* + h)[v] \geqslant 0 \quad \text{在}D\text{中}, \\ 2\sqrt{b^2 - ac}\,\frac{dv}{d\sigma_+} + \widetilde{K}_+ v \geqslant 0 \quad \text{在}D\text{中}, \\ 2\sqrt{b^2 - ac}\,\frac{dv}{d\sigma_-} + \widetilde{K}_- v \geqslant 0 \quad \text{在}D\text{中}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

其中 $\widetilde{K}_\pm$ 由(4)定义. 量 $K_\pm^*$ 的定义保持不变. 下面两个定理就是

定理 5 和 6′ 在这种情形下的适当的推广.

定理 7. 假设存在一个定义在容许区域 D 中，且满足不等式组(10)的正函数 v. 如果 u 满足

$$(L+h)[u] \geqslant 0 \quad \text{在} D \text{中},$$

$$2\sqrt{b^2-ac}\,\frac{du}{d\sigma_+} + K_+^* u \leqslant 0 \quad \text{在} \Gamma_+ \text{上},$$

$$2\sqrt{b^2-ac}\,\frac{du}{d\sigma_-} + K_-^* u \leqslant 0 \quad \text{在} \Gamma_- \text{上},$$

$$u(O) \leqslant 0,$$

那么,在 D 中就有

$$u \leqslant 0.$$

定理 8. 假设存在一个定义在容许区域 D 中，且满足不等式组(10)的正函数 v. 此外,还假设在 Γ_+ 上 $K_+^* \geqslant 0$, 在 Γ_- 上 $K_-^* \geqslant 0$,而且 $h \leqslant 0$. 如果 $u(x,t)$ 满足不等式组

$$(L+h)[u] \geqslant 0 \quad \text{在} D \text{中},$$

$$\frac{du}{d\sigma_+} \leqslant 0 \quad \text{在} \Gamma_+ \text{上}, \quad \frac{du}{d\sigma_-} \leqslant 0 \quad \text{在} \Gamma_- \text{上},$$

那么,在 D 中就有

$$u(x,t) \leqslant \max(0, u(O)),$$

其中 O 是 Γ_+ 和 Γ_- 的交点. 如果在 D 中 $h \equiv 0$, 那么在 D 中 $u \leqslant u(O)$.

仅当能够求得具有所要求性质的正函数 v 时，定理 7 和 8 才是有用的. 为此,我们首先指出对特殊的算子

$$L_1 + h = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + d\frac{\partial}{\partial x} + e\frac{\partial}{\partial t} + h$$

在特征线 Γ_+: $t=0$, Γ_-: $x=0$ 的一个邻域中，怎样构造这样的函数. 对于算子 L_1+h,条件(10)变成了

$$-v_{xt} - dv_x - ev_t - (d_x + e_t - h)v \geqslant 0,$$

$$v_x + ev \geqslant 0,$$

$$v_t + dv \geqslant 0.$$

我们令

$$v = e^{\alpha(x+t)} + \gamma x e^{-\beta t},$$

其中正的常数 α 和 β 被选得使

$$\alpha + d > 0,\ \alpha + e > 0,\ \beta - d > 0,$$

而且 γ 是足够大的正数，使得

$$-[(\alpha + d)(\alpha + e) + d_x + e_t - de - h]e^{\alpha t} + \gamma(\beta - d)e^{-\beta t} > 0$$

在直线段 s_1: $\{x = 0, 0 \leqslant t \leqslant t_0\}$ 上成立．于是，在 s_1 上满足的是严格的不等式组(10)．所以，由连续性必存在一个区域 D_1: $0 < x < \delta, 0 < t \leqslant t_0$，在其中不等式组(10)成立．我们注意到 α, β, γ 和 δ，因而还有 D_1 都只依赖于 d, e, h, d_x 和 e_t 的界．把 x 和 t 互换，我们可以在一个边界包含任一有限区间 s_2: $\{t = 0, 0 \leqslant x \leqslant x_0\}$ 的矩形区域 D_2 中构造函数 v． 把 D_1 和 D_2 合并起来就能得到边界包含 s_1 和 s_2 的一个容许区域 D，在该区域中定理 7 成立．

为了对于由(1)给出的一般算子$(L + h)$得到函数 v，我们作坐标变换．引进沿着特征线是常数的新坐标(ξ, η)，也就是说，在 Γ_+ 上 $\xi = \sigma_+$，ξ 沿 C_-特征线是常数，而在 Γ_-上 $\eta = \sigma_-$，η 沿 C_+特征线是常数．量(ξ, η)被称为**特征坐标**． 在 Γ_+ 和 Γ_- 的交点 O 处取 $\sigma_+ = \sigma_- = \xi = \eta = 0$． 对 $L + h$ 应用链锁法则可得：在(ξ, η)坐标系中，算子$(L + h)$中 $\partial^2/\partial\xi^2$ 和 $\partial^2/\partial\eta^2$ 的系数为零，而 $\partial^2/\partial\xi\partial\eta$ 的系数是负的．所以，取函数

$$v = e^{\alpha(\xi+\eta)} + \gamma\xi e^{-\beta\eta}$$

和

$$v = e^{\alpha(\xi+\eta)} + \gamma\eta e^{-\beta\xi}$$

(α, β, γ 充分大)，我们就可以使 v 在一个容许区域 D 中满足不等式组(10)．D 的大小依赖于 $L + h$ 的系数及其一、二阶导数的界，以及$\sqrt{b^2 - ac}$ 的正下界．因此证实了 v 的存在性． 在下一个定理中我们要用到这个事实．

定理 9. 对任何有限特征线段 Γ_+和 Γ_-存在一个容许区域 D，它的大小依赖于 $L + h$ 的系数及其一、二阶导数的界以及 $b^2 - ac$

的正下界，使得 Γ_+ 和 Γ_- 位于 D 的边界上，从而定理 7 在 D 中成立．此外，如果在 Γ_+ 上 $K_+^* \geqslant 0$，在 Γ_- 上 $K_-^* \geqslant 0$，以及 $h \leqslant 0$，则定理 8 在 D 中成立．

前面所有的最大值原理都需要对算子 $L+h$ 的系数以及函数 u 作某些假设．现在我们指出可以通过加强某些假设减弱另一些假设来得到各种不同的定理．

定理 10. 设 $L+h$ 的系数满足不等式组

$$(L^*+h)[1] \geqslant 0 \quad \text{在} D \text{中},$$
$$\widetilde{K}_+ \geqslant 0,\ \widetilde{K}_- \geqslant 0 \quad \text{在} D \text{中},$$
$$\widetilde{K}_- = 0 \quad \text{在} \Gamma_- \text{上}.$$

如果 u 满足不等式组

$$(L+h)[u] \geqslant 0 \quad \text{在} D \text{中},$$
$$2\sqrt{b^2-ac}\frac{du}{d\sigma_+} + K_+^* u \leqslant 0 \quad \text{在} \Gamma_+ \text{上},$$
$$u \leqslant 0 \quad \text{在} \Gamma_- \text{上},$$

其中 $\widetilde{K}_\pm$ 和 $K_\pm^*$ 由(4)定义，那么在 D 中

$$u \leqslant 0.$$

证明. 沿 Γ_- 分部积分可得恒等式

$$\int_0^A \left(2\sqrt{b^2-ac}\frac{du}{d\sigma_-} + K_-^* u\right) d\sigma = 2\sqrt{b^2-ac}\,u(A) - 2\sqrt{b^2-ac}\,u(O) - \int_0^A \widetilde{K}_- u\, d\sigma_-.$$

把这个关系式代入公式(3)，我们得到

$$u(C) = \frac{1}{2\sqrt{[b^2-ac]_C}}\Big[2\sqrt{b^2-ac}\,u(A) + \int_A^C u\widetilde{K}_+ d\sigma_+ + \int_B^C u\widetilde{K}_- d\sigma_- + \iint_{AOBC}\{u(L^*+h)[1] - (L+h)[u]\}dxdt - \int_0^A u\widetilde{K}_- d\sigma_- + \int_0^B \Big\{2\sqrt{b^2-ac}\frac{du}{d\sigma_+} + K_+^* u\Big\} d\sigma_+\Big].$$

余下的论证和定理 5 证明中的论证相同．

附注. (i)我们指出定理 10 和定理 5 的区别在于：没有对 Γ_- 上的 $\frac{du}{d\sigma_-}$ 作假设．另一方面，要求 L 的系数在 Γ_- 上满足 $\widetilde{K}_-=0$.

(ii) 如果我们用假设 Γ_+ 上 $\widetilde{K}_+=0$ 来代替 Γ_- 上 $\widetilde{K}_-=0$，显然类似的结论也成立.

(iii) 如果在 Γ_+ 上 $\widetilde{K}_+=0$ 与在 Γ_- 上 $\widetilde{K}_-=0$ 同时成立，我们就能够用对 Γ_- 上的所有 A 和 Γ_+ 上的所有 B 都成立的条件：

$$\sqrt{b^2-ac}\,u(A)+\sqrt{b^2-ac}\,u(B)-\sqrt{b^2-ac}\,u(O)\leqslant 0$$

来代替关于 $u, du/d\sigma_+$ 和 $du/d\sigma_-$ 的条件.

(iv) 注意条件

$$2\sqrt{b^2-ac}\,\frac{du}{d\sigma_+}+K_+^*u\leqslant 0 \quad 在\ \Gamma_+\ 上$$

和 $u(O)\leqslant 0$ 一起就可推出在 Γ_+ 上 $u\leqslant 0$.

如果我们用正函数 v 乘以算子 $L+h$，不难证实定理 10 的如下推广.

定理 11. 假设存在在 D 中满足不等式组(10)的正函数 v. 此外，设 v 在 Γ_- 上满足

$$2\sqrt{b^2-ac}\,\frac{dv}{d\sigma_-}+\widetilde{K}_-v=0.$$

如果 u 满足

$$(L+h)[u]\geqslant 0 \quad 在 D 中,$$

$$2\sqrt{b^2-ac}\,\frac{du}{d\sigma_+}+K_+^*u\leqslant 0 \quad 在\ \Gamma_+\ 上,$$

$$u\leqslant 0 \quad 在\ \Gamma_-上,$$

那么在 D 中

$$u\leqslant 0.$$

调整假设条件可推出与定理 6′ 类似的结果，我们叙述如下.

定理 12. 假设存在在 D 中满足不等式组(10)的正函数 v. 此外，假设

$$2\sqrt{b^2-ac}\frac{dv}{d\sigma_-}+\widetilde{K}_-v=0 \quad \text{在 } \Gamma_- \text{ 上},$$

$$K_+^* \geqslant 0 \quad \text{在 } \Gamma_+ \text{ 上},$$

$$h \leqslant 0 \quad \text{在 } D \text{ 中},$$

而M是非负常数．如果 u 满足

$$(L+h)[u] \geqslant 0 \quad \text{在 } D \text{ 中}$$

$$\frac{du}{d\sigma_+} \leqslant 0 \quad \text{在 } \Gamma_+ \text{ 上},$$

$$u \leqslant M \quad \text{在 } \Gamma_- \text{ 上},$$

那么在D中

$$u \leqslant M.$$

现在，我们研究对特殊算子

$$(L_1+h)[u] = -u_{xt}+du_x+eu_t+hu, \tag{11}$$

把正 x 轴选作 Γ_+，正 t 轴选作 Γ_-时，定理 11 和定理 12 所取的特殊形式(见图 7)．容易验证

$$2\sqrt{b^2-ac}\frac{dv}{d\sigma_+}+\widetilde{K}_+v=v_x+ev,$$

$$2\sqrt{b^2-ac}\frac{dv}{d\sigma_-}+\widetilde{K}_-v=v_t+dv.$$

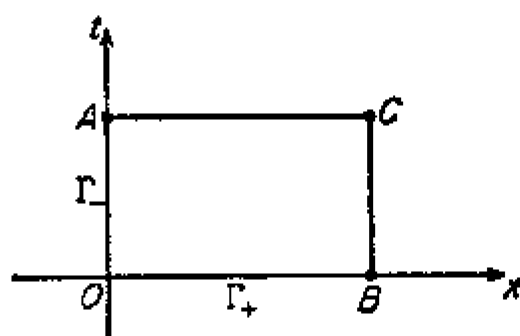


图 7

我们选取

$$v=e^{\beta x-\int_0^t d(x,\tau)d\tau} \tag{12}$$

其中 β 待定．简单的计算表明

$$v_t + dv \cong 0.$$

现在我们取 β 足够大，使

$$v_x + cv \cong [\beta - \int_0^t d_x(x,\tau)d\tau + c]v$$

在D中非负．另外的计算给出

$$(L_1^* + h)[v] = (de - e_t + h)v.$$

现在把定理 11 用于算子 $L_1 + h$ 就得到：如果 u 满足

$$(L_1 + h)[u] \geqslant 0 \quad 在D中,$$

$$u_x - eu \leqslant 0 \quad 在\Gamma_+上$$

$$u(0,t) \leqslant 0,$$

又如果

$$de - e_t + h \geqslant 0 \quad 在D中, \tag{13}$$

那么在D中

$$u \leqslant 0.$$

利用由(12)给出的函数 v，我们也可把定理 12 用于算子 $L_1 + h$．我们注意到 $K_+^* = -e$．所以如果在 Γ_+ 上满足条件 $-e(x,0) \geqslant 0$，又如果不等式 $h \leqslant 0$ 以及(13)在D中成立，则可应用定理 12．得到的结果断言：如果 u 满足

$$(L_1 + h)[u] \geqslant 0 \quad 在D中,$$

$$u_x \leqslant 0 \quad 在\Gamma_+上,$$

$$u \leqslant M \quad 在\Gamma_-上,$$

其中 $M \geqslant 0$，那么在D中

$$u \leqslant M.$$

这是 Agmon, Nirenberg 和 Protter [1] 的结果．另一个结果可从定理 10($v = 1$)得出．它断言：如果用

$$\left.\begin{array}{r} d \geqslant 0 \\ e \geqslant 0 \\ -d_x - e_t + h \geqslant 0 \end{array}\right\} 在D中,$$

$$d(0,t) = 0$$

来代替(13)，u 满足同样的最大值原理．

把类似的考虑应用到更一般的双曲型算子

$$(L+h)[u]=au_{xx}+2bu_{xt}+cu_{tt}+du_x+eu_t+hu$$

上去．利用条件：在每条 C_- 特征线上

$$2\sqrt{b^2-ac}\,\frac{dv}{d\sigma_-}+\widetilde{K}_-v=0$$

来定义函数 v．容易看出可以适当规定 v 在 Γ_+ 上的初值，使得

$$2\sqrt{b^2-ac}\,\frac{dv}{d\sigma_+}+\widetilde{K}_+v\geqslant 0$$

在任何有界容许区域 D 中成立．条件

$$(L^*+h)[v]\geqslant 0$$

变成了

$$(-b-\sqrt{b^2-ac})P_x-cP_t+aQ_x-(-b+\sqrt{b^2-ac})Q_t$$
$$-\frac{1}{2}(aQ^2-2bPQ+cP^2)+Qd-Pc-2h\leqslant 0, \qquad (14)$$

其中，我们已经令

$$P=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a}{\sqrt{b^2-ac}}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{b}{\sqrt{b^2-ac}}\right)-\frac{d}{\sqrt{b^2-ac}},$$

$$Q=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{\sqrt{b^2-ac}}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c}{\sqrt{b^2-ac}}\right)-\frac{e}{\sqrt{b^2-ac}}.$$

在算子是(11)的特殊情形中，不等式(14)简化成了(13)．如果(14)成立，那么可以应用定理 11．此外，如果在 Γ_+ 上 $K_+^*\geqslant 0$，那么定理 12 也成立．

附注．(i)如果我们希望交换 Γ_+ 与 Γ_- 的作用，只需在(13)中用 d_x 代替 e_t，或者在(14)中交换 $-b-\sqrt{b^2-ac}$ 和 $-b+\sqrt{b^2-ac}$ 的系数．当然，K_+^* 要用 K_-^* 来代替．

(ii) 如果，与我们的约定相反，Γ_+ 在 Γ_- 的左边，只需把(13)或(14)中的 h 换成 $-h$．量 K_+^* 保持不变，但是不等式 $(L+h)[u]\geqslant 0$ 必须代之以 $(L+h)[u]\leqslant 0$，而在定理 12 中条件 $h\leqslant 0$ 要

变成 $h \geqslant 0$.

(iii) 下面的例子表明条件(13)或(14)是必须的. (也可参看 Agmon, Nirenberg 和 Protter [1].)假设在 t 轴的区间 $(0, t_0]$ 上 $dc - c_t + h < 0$. 设

$$u(x,0) \equiv 0,$$
$$u(0,t) = -1 + \cos(2\pi t/t_0).$$

我们把方程 $(L_1 + h)[u] = 0$ 写成形式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - d\right)[u_x - cu] = (dc - c_t + h)u.$$

在 $x = 0$ 上式右端当 $0 < t < t_0$ 时是正的. 因为在 $(0, 0)$ 处 $u_x - cu = 0$,由此可得

$$u_x(0,t_0) = u_x(0,t_0) - c(0,t_0)u(0,t_0) > 0.$$

所以 u 在 D 中变成正的了，这与定理 11 矛盾. 从而如果 $c(x,0) \leqslant 0$,就与定理 12 矛盾.

习　　题

1. 对算子

$$L[u] \equiv u_{xx} - u_{tt} + (1 + x^2)u_x - 2tu_t,$$

计算量 $\tilde{K}_\pm$ 和 $K_\pm^*$.

2. 验证算子

$$L[u] \equiv tu_{xx} - u_{tt}$$

的系数当 $t > 0$ 时满足不等式组(6).

3. 证明 $u_{xt} = 0$ 的解,在由正 x 轴和正 t 轴围成的任一容许区域 D 中满足弱最大值原理,但不满足强最大值原理.

4. 在区域 D: $\{0 < x < 1,\ 0 < t < 1\}$ 中对算子

$$L[u] \equiv -u_{xt} - tu_x - xu,$$

确定满足不等式组(10)的函数 v.

5. 在区域 D: $\{1 < x < 2, 0 < t < 1\}$ 中对算子

$$L[u] \equiv -u_{xt} + (1 + t)u_x - (1 - x^2)u_t$$

确定使定理 11 的假设成立的函数 v.

6. (a)试确定 α 的值(若有的话),使算子

$$L[u] \equiv t^{2q} u_{xx} - u_{tt}$$

当 $t > 0$ 时满足不等式(14)。

(b) 确定关于 d 和 e 的不等式，使算子

$$L[u] \equiv u_{xx} - x u_{tt} + d u_x + e u_t, \quad x > 0, \quad t > 0$$

满足不等式(14)。

第九节 Goursat 问题

我们再来考虑区域D中的微分不等式 $(L + h)[u] \geqslant 0$，其中 L 由第八节方程(1)给出。假设D的边界的一部分是 C_+特征线 Γ_+，而另一部分由曲线 Γ_1：$x = x_1(\sigma), t = t_1(\sigma)$ 组成，它的切向量 $(dx_1/d\sigma, dt_1/d\sigma)$ 满足不等式

$$a\left(\frac{dt_1}{d\sigma}\right)^2 - 2b\frac{dx_1}{d\sigma}\cdot\frac{dt_1}{d\sigma} + c\left(\frac{dx_1}{d\sigma}\right)^2 \geqslant 0.$$

如果区域D具有性质：通过D的每一点C都有位于D中的一条 C_+特征线 AC 和一条 C_-特征线 BC，而且 A 在 Γ_1 上，B 在 Γ_+ 上(见图 8)，它就是一个容许区域．确定在 Γ_+和 Γ_1 上的值为给定函数的 $(L + h)[w] = f$ 的解 w，这样的问题被称为 Goursat **问题**。

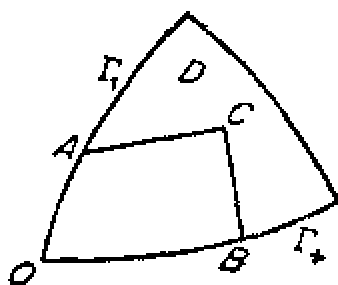


图 8

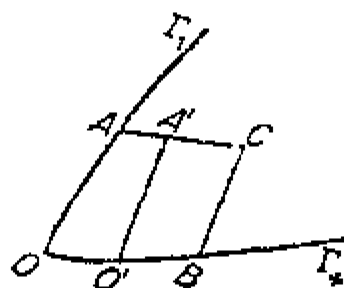


图 9

现在我们假设对 D 中的每一点 C 存在一个特征四边形 $A'O'BC$，对它我们可以应用定理 12(见图 9)．也就是说，假设存在正函数 v，它满足不等式组(10)，并在 $O'A'$ 上满足关系式

$$2\sqrt{b^2 - ac}\,\frac{dv}{d\sigma_-} + \tilde{K}_- v = 0.$$

我们还假设在D中$h \leqslant 0$, $(L+h)[u] \geqslant 0$. 如果在Γ_+上$K_+^* \geqslant 0$和$\frac{du}{d\sigma_+} \leqslant 0$, 那么$u$就不能在区域$D$的任意点$C$达到非负最大值. 因而,在这些条件下,$u$的非负最大值必然或在$\Gamma_1$上或在$\Gamma_+$上达到. 因为在$\Gamma_+$上$\frac{du}{d\sigma_+} \leqslant 0$, 这个最大值必在$\Gamma_1$上取到. 下一个定理叙述了对于算子 $L_1 \equiv -(\partial^2/\partial x\partial t) + d(\partial/\partial x) + e(\partial/\partial t)$ 的最大值原理.

定理 13. 假设下列条件成立:

(i) $(L_1 + h)[u] \equiv -u_{xt} + du_x + eu_t + hu \geqslant 0$

在位于第一象限中夹在x轴和斜率非负的曲线Γ_1之间的区域D中成立.

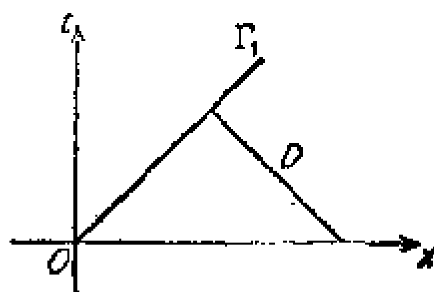


图 10

(ii) $de - e_t + h \geqslant 0$,

(iii) $e(x,0) \leqslant 0$,

(iv) $u_x(x,0) \leqslant 0$,

(v) 在Γ_1上 $u \leqslant M$,其中 $M \geqslant 0$,

(vi) $h \leqslant 0$,

那么在D中

$$u \leqslant M.$$

这就是 Agmon, Nirenberg 和 Protter[1] 原先的最大值原理.

更一般地,如果u满足 $(L+h)[u] \geqslant 0$, L 的系数满足第八节的不等式(14),而且在Γ_+上$K_+^* \geqslant 0$,我们有同样的结果.

习　　题

1. 显式地确定算子 $L[u]\equiv t^{\alpha}u_{xx}-x^{\beta}u_{tt}, x>0, t>0$ 的 C_+和 C_-特征线族. 描述 Goursat 问题的一个容许区域.

2. 试确定函数 $K(t)>0$ 应满足的条件，使得在由一条特征和一条非特征曲线围成的区域 D 中，对算子 $K(t)u_{xx}-u_{tt}$ 定理 13 的最大值原理成立

第十节　比较定理

和椭圆型方程的情形一样，我们可以把双曲型方程的各种定理用于比值 u/φ，其中 u 满足微分不等式，而 φ 是任一正函数. 令

$$\bar{u}=\frac{u}{\varphi},$$

我们可得

$$(\bar{L}+\bar{h})[\bar{u}]=\frac{1}{\varphi}(L+h)[u]=L[\bar{u}]+\frac{2}{\varphi}(a\varphi_x+b\varphi_t)\bar{u}_x+\frac{2}{\varphi}(b\varphi_x+c\varphi_t)\bar{u}_t+\frac{(L+h)[\varphi]}{\varphi}\bar{u}.$$

因此，不等式 $(L+h)[u]\geqslant 0$ 变成了

$$(\bar{L}+\bar{h})[\bar{u}]\geqslant 0,$$

其中 $\bar{h}=(L+h)[\varphi]/\varphi$. 对 v 的不等式是直接乘上 φ 而得的不等式. 所以关于 v 的条件保持不变. 但是，K_+^* 要用 $2\sqrt{b^2-ac}\dfrac{d\varphi}{d\sigma_+}+K_+^*\varphi$ 来代替. 而且如在前面见到的那样，h 要换成 $(L+h)[\varphi]/\varphi$. 因此，如果我们有满足以下条件的函数 φ

$$\left.\begin{aligned}&\varphi>0 \quad 在\ D\cup\Gamma_+\cup\Gamma_-中,\\&2\sqrt{b^2-ac}\frac{d\varphi}{d\sigma_+}+K_+^*\varphi\geqslant 0 \quad 在\ \Gamma_+上,\\&(L+h)[\varphi]\leqslant 0 \quad 在 D 中,\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

则可把定理 12 用于 $\bar{u}=u/\varphi$.

不难构造一个具有性质(1)的函数 φ. 例如，在

$$(L_1 + h)[u] = -u_{xt} + du_x + eu_t + hu$$

的情形，我们只需令

$$\varphi = e^{\beta(x+t)},$$

然后选 β 充分大，使得

$$(L + h)[\varphi] = (-\beta^2 + \beta d + \beta e + h)\varphi \leqslant 0 \quad 在D中,$$

$$2\sqrt{b^2 - ac}\frac{d\varphi}{dx} + K_-^*\varphi = (\beta - e)\varphi \geqslant 0 \quad 当\ t = 0\ 时.$$

因此，对于这个方程的情形，为了对 $e^{-\beta(x+t)}u$ 得到最大值原理，唯一需要的条件就是第八节的(13)。类似可证，在一般情形下对于某些 $\phi > 0$ 为得到 u/ϕ 的最大值原理，第八节的不等式(14)已是足够的了。第八节末尾的附注(iii)中的例子表明，条件(13)或(14)也是需要的。

习　　题

给定算子

$$(L + h)[u] \equiv -u_{xt} + xu_x + xtu_t + xu,$$

验证当 $t \geqslant 0$ 时它满足第八节的不等式(13)。然后求出 β 的一个值，使得 $e^{-\beta(x+t)}u$ 在区域 $D:\{0<x<1,\ 0<t<1\}$ 中满足最大值原理。

第十一节　高维波动方程

到现在为止，我们已经讨论过的只是二维的双曲型方程。但是在很多物理问题中，我们需要讨论在三维或更高维数的空间中的双曲型方程的初值问题。最简单的例子是三维波动方程

$$\square u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, y, t). \tag{1}$$

它是张紧的膜在单位面积上的法向力 f 作用之下微小竖向位移所满足的方程。

当 $t = 0$ 时给定 u 和 $\partial u/\partial t$ 作为 x, y 的函数，而对 $t > 0$ 求

$u(x,y,t)$ 就构成了初值问题。能够显式解出这个问题(例如，参看 Courant 和 Hilbert[1,p.205][1) 或 Garabedian[1,p. 205]。)

$$u(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2\pi}\iint_{\xi^2+\eta^2<t^2}\frac{u(x+\xi,y+\eta,0)}{\sqrt{t^2-\xi^2-\eta^2}}d\xi d\eta$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint_{\xi^2+\eta^2<t^2}\frac{u_t(x+\xi,y+\eta,0)}{\sqrt{t^2-\xi^2-\eta^2}}d\xi d\eta$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\iint_{\xi^2+\eta^2<(t-\tau)^2}\frac{\Box u(x+\xi,y+\eta,\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-\xi^2-\eta^2}}d\xi d\eta. \qquad (2)$$

从它可以推出，如果

$$u(x,y,0)=0,$$
$$u_t(x,y,0)\leqslant 0,$$
$$\Box u\geqslant 0,$$

则当 $t>0$ 时

$$u\leqslant 0.$$

这个结论是一个非常简单的最大值原理。但是，对一般的初值 $u(x,y,0)$，这样的最大值原理却不成立。例如，若我们取 $r^2=x^2+y^2$，并定义 u 是方程 $\Box u=0$ 满足初始条件

$$u(x,y,0)=\begin{cases}e^{-\alpha(r-2)^2/(r-1)(3-r)} & \text{当 } 1\leqslant r\leqslant 3 \text{ 时},\\ 0 & \text{当 } r\leqslant 1 \text{ 时},\\ 0 & \text{当 } r\geqslant 3 \text{ 时},\end{cases}$$
$$u_t(x,y,0)=0$$

的解，于是我们知道对任何 $\alpha>0$，$0\leqslant u(x,y,0)\leqslant 1$，并且 $u(x,y,0)$ 无穷次可微。另一方面，当 $t>3$ 时，从(2)我们有

$$u(0,0,t)=-t\int_1^3(t^2-r^2)^{-\frac{3}{2}}e^{-\alpha(r-2)^2/(r-1)(3-r)}r\,dr,\quad t>3.$$

因此

$$\lim_{\alpha\to 0}u(0,0,t)=-t[(t^2-9)^{-\frac{1}{2}}-(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}].$$

由此可知，对充分接近 0 的 α 和充分接近 3 的 t，$-u(0,0,t)$ 将

1) 本书有中译本。——译者注

任意地大．所以，具有上面数据的波动方程不能满足最大值原理．

为了得到最大值原理，我们把微分方程(1)对 t 求微分，然后把公式(2)用于 u_t．我们得到

$$u_t(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2\pi}\iint_{\xi^2+\eta^2<t^2}\frac{u_t(x+\xi,y+\eta,0)}{\sqrt{t^2-\xi^2-\eta^2}}\,d\xi d\eta$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint_{\xi^2+\eta^2<t^2}\frac{u_{tt}(x+\xi,y+\eta,0)}{\sqrt{t^2-\xi^2-\eta^2}}\,d\xi d\eta$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\iint_{\xi^2+\eta^2<(t-\tau)^2}\frac{\frac{\partial}{\partial t}\Box u(x+\xi,y+\eta,\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-\xi^2-\eta^2}}d\xi d\eta. \tag{3}$$

我们注意到当 $t=0$ 时微分方程可以写成

$$u_{tt}(x,y,0)=\Delta u(x,y,0)-f(x,y,0), \tag{4}$$

所以 $u_{tt}(x,y,0)$ 由给定数据决定．

现在，从 $t=0$ 到任意的 t 值积分式(3)，可得公式

$$u(x,y,t)=u(x,y,0)+\frac{1}{2\pi}\iint_{\xi^2+\eta^2<t^2}\frac{u_t(x+\xi,y+\eta,0)}{\sqrt{t^2-\xi^2-\eta^2}}\,d\xi d\eta$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\iint_{\xi^2+\eta^2<\tau^2}\frac{u_{tt}(x+\xi,y+\eta,0)}{\sqrt{\tau^2-\xi^2-\eta^2}}\,d\xi d\eta$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}d\tau\iint_{\xi^2+\eta^2<(t_1-\tau)^2}\frac{\frac{\partial}{\partial t}\Box u(x+\xi,y+\eta,\tau)}{\sqrt{(t_1-\tau)^2-\xi^2-\eta^2}}d\xi d\eta. \tag{5}$$

这个公式是与(2)等价的解的另一公式．当然，我们已经假设了 f 对 t 可微． 这个公式(5)只包含给定的量和能够用(4)算出的 $u_{tt}(x,y,0)$ 的积分．

现在，从(5)显然可得，如果

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\Box u\geqslant 0,\\&u_t(x,y,0)\leqslant 0,\\&u_{tt}(x,y,0)\leqslant 0,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

则

$$u(x,y,t) \leqslant u(x,y,0).$$

事实上，只需要在相应于点 (x,y,t) 的特征锥

$$(\bar{x}-x)^2+(\bar{y}-y)^2<(\bar{t}-t)^2,\ 0<\bar{t}<t$$

中的 $(\bar{x},\bar{y},\bar{t})$ 上，这些不等式成立就够了。

因此，我们就有了一个最大值原理(见 Weinstein [2,3])：

定理 14. 如果 u 在半空间 $t \geqslant 0$ 中的区域 D 中满足条件(6)，并且D具有性质：它包含了它的每一点的特征锥，那么 u 在 D 中的最大值必在初始平面 $t=0$ 上达到。

类似的结果在维数更高的情形也成立．我们定义

$$\Box u(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

可得到，如果

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Box u \geqslant 0 \quad 在D中,$$

$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i}(x_1,x_2,\cdots,x_n,0)\leqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n,$$

其中D是 $t\geqslant 0$ 中包含D的每一点的特征锥的区域，那么 u 在D中的最大值必在 $t=0$ 上达到．

在 $t=0$ 上量 $\partial^2 u/\partial t^2,\cdots,\partial^n u/\partial t^n$ 仍可从微分方程以及 u 和 $\partial u/\partial t$ 的初值求出．因此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_1,\cdots,x_n,0)=\Delta u(x_1,\cdots,x_n,0)-\Box u(x_1,\cdots,x_n,0)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_1,\cdots,x_n,0)=\Delta\frac{\partial u}{\partial t}(x_1,\cdots,x_n,0)-\frac{\partial}{\partial t}\Box u(x_1,\cdots,x_n,0)$$

等等(见 Weinberger[3])。

上面的结果可用来估计逼近过程中产生的误差．例如，考虑问题

$$\Box u=u_{xx}+u_{yy}-u_{tt}=0,$$

$$u(x,y,0)=g(x,y),$$
$$u_t(x,y,0)=0.$$

我们关心的是在一个特定点，例如说，$P(0,0,1)$ 处的 u 值。于是，我们可以用任何一种我们乐意的方式来改变 $g(x,y)$ 在圆 $x^2+y^2\leqslant 1$ 以外的值，而不会影响由(5)给出的值 $u(0,0,1)$。特别是，我们能够把 g 在正方形 $|x|<\pi, |y|<\pi$ 之外延拓成以 2π 为周期的周期函数。

如果改变和延拓之后的函数 g 充分光滑，就能够用 g 的 Fourier 级数的部分和

$$g\cong\sum_{m,n=-N}^{N}a_{mn}e^{i(mx+ny)}$$

来一致逼近 g，于是，我们可以期望用函数

$$v=\sum_{m,n=-N}^{N}a_{mn}e^{i(mx+ny)}\cos\sqrt{m^2+n^2}\,t$$

来逼近 u。假设当 $|x|\leqslant\pi, |y|\leqslant\pi$ 时

$$\left|g-\sum_{-N}^{N}a_{mn}e^{i(mx+ny)}\right|\leqslant\varepsilon,$$

我们能不能说 $|u-v|$ 在 $P(0,0,1)$ 很小呢？我们知道

$$\Box(u-v)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u-v)=0\quad 当\ t=0\ 时,$$

以及

$$|u-v|\leqslant\varepsilon\quad 当\ t=0\ 时,$$

但是为了应用最大值原理，这样的信息是不够的。我们需要知道当 $t=0$ 时 $(\partial^2/\partial t^2)(u-v)\leqslant 0$ 才能够得出点 P 处 $u-v\leqslant\varepsilon$ 的结论。现在，由微分方程我们有

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u-v)\bigg|_{t=0}=\Delta g+\sum_{-N}^{N}(m^2+n^2)a_{mn}e^{i(mx+ny)},$$

由 Fourier 级数微分定理，右端的和式是 $-1\Delta g$ 的 Fourier 级数的一个部分和。因此，如果 Δg 光滑(例如，连续可微)，就可以选取

N 使得

$$\left|\left[\frac{\partial^2(u-v)}{\partial t^2}\right]_{t=0}\right| \leqslant \varepsilon_1,$$

其中 ε_1 是另一个小的常数。

现在我们考虑函数

$$w = u - v - \frac{1}{2}\varepsilon_1 t^2.$$

显然这个函数满足

$$\frac{\partial}{\partial t}\square w = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,y,0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,y,0) \leqslant 0,$$

$$w(x,y,0) \leqslant \varepsilon.$$

因此，由最大值原理得到

$$w(x,y,t) \leqslant \varepsilon.$$

这意味着

$$u - v \leqslant \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon_1 t^2.$$

同样的结论对 $v-u$ 也成立. 这样我们就得到了在点 $P(0,0,1)$ 处，事实上，也是在锥 $t^2 \leqslant x^2 + y^2$ 的所有点处误差的界

$$|u - v| < \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon_1 t^2.$$

在更大的圆之外改变 u，并把它延拓成有更大周期的函数，就能在其它点上得到近似值和误差的界.

定理 14 的最大值原理已被 Weinberger [3] 推广到包含波动方程的一类三维方程，还由 Sather [1,2,3] 推广到了一类任何维数的相当一般的双曲型方程上去。特别是 Sather 在 n 维情形的结果表明，定理 14 的条件

$$\frac{\partial^{n-1}\Box u}{\partial t^{n-1}} \geqslant 0,\quad \frac{\partial^i u(\boldsymbol{x},0)}{\partial t^i} \leqslant 0,\quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

可以代之以条件

$$\frac{\partial^N\Box u}{\partial t^N} \geqslant 0,\quad \frac{\partial^i u(\boldsymbol{x},0)}{\partial t^i} = 0 \quad 0 \leqslant i \leqslant N,$$

$$\frac{\partial^{N+1}u(\boldsymbol{x},0)}{\partial t^{N+1}} \leqslant 0,$$

其中N是满足$N \geqslant \frac{1}{2}(n-2)$的任一整数。(类似的结果可见 Carroll[2]。)

习　　题

1. 验证(2)是 $\Box u = f$ 的解.

2. 对 $L[u]=u_{xx}+u_{yt}=0$ 的初值问题的解，叙述与定理 14 类似的最大值原理.

文 献 注 记

P. Germain 和 R. Bader[1] 对 Tricomi 方程 $yu_{xx}+u_{yy}=0$ 得到了双曲型方程的第一个最大值原理. 这个结果由 S. Agmon, L. Nirenberg 和 M. H. Protter [1] 推广到了更一般的方程. 利用这些定理得到了关于混合型方程(在区域的一部分中是椭圆型,而在另一部分中是双曲型的方程)问题的唯一性定理. C. S. Morawetz [1] 发现了混合型方程 $K(y)u_{xx}+u_{yy}=0$ 的另一个形式的最大值原理，他用它来证明了一个不同的唯一性定理. 在 F. Tricomi [1] 和 A. V. Bitsadze [1] 的书中可以找到关于混合型方程的广泛详尽的讨论.

H. F. Weinberger[2] 给出了二维初值问题的最大值原理,M. H. Protter [1] 作了推广.

J. Schröder [1] 得到了双特征问题的不同的最大值原理.

对于二维初边值问题的更一般的最大值原理已经由 D. Sather [4], L. E. Payne 和 D. Sather [1]得到.

二维非线性双曲型方程的比较定理和误差估计是由 W. Walter[2,3]和H. H. Gloistehn [2] 给出的. 其它的参考文献可在 W. Walter [3] 的书中找到.

对于一类 n 维方程 $u_{tt}+(k/t)u_t-\Delta u=0$ (Euler-Poisson-Darboux 方程)的最大值原理已被 A. Weinstein [2,3] 发现. R. Carroll [1,2] 对于方程 $u_{tt}+(k/t)u_t-A[u]=0$ 改进和推广了这个结果，其中 A 是变量 x_1, $x_2,\cdots,x_n$ 的常系数微分算子，它满足比椭圆性稍弱的假设.

对于一类三维的变系数方程，H. F. Weinberger [3] 给出了一个最大值原理，D. Sather [1,2,3] 对于一大类 n 维方程改进和推广了这个结果.

参 考 文 献

Agmon, S.

1. Maximum properties for solutions of higher order elliptic equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66 (1960), pp. 77-80.
2. Unicité et convexité dans les problèmes différentielles. *Sem. d'Analyse Sup., Univ. de Montreal*, 1965.

Agmon, S., L. Nirenberg, and M. H. Protter

1. A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type. *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 6 (1953), pp. 455-470.

Aleksandrov, A. D.

1. Certain estimates for the Dirichlet problem. *Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, 134 (1960), pp. 1001-1004. Translated in *Soviet Math.*, 1 (1960), pp. 1151-1154.
2. The method of normal map in uniqueness problems and estimations for elliptic equations. *Seminari 1962-1963 di Analisi, Algebra, Geometria, e Topologia, Istituto Nazionale di Alta Matematica*, Edizioni Cremonese. Rome, 2 (1965), pp. 744-796.
3. Estimates for the solution of linear second order equations. *Vestnik, Leningrad University, Math., Mech, and Astron. series*, (1966), No. 1.

Antohin, Ju. T.

1. The Dirichlet problem for a second order elliptic equation in an unbounded region. *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 60 (1961), pp. 22-41.

Aronson, D. G.

1. Linear parabolic differential equations containing a small parameter. *J. of Rat. Mech. Anal.*, 5 (1956), pp. 1003-1014.
2. Removable singularities for linear parabolic equations. *Arch. for Rat. Mech. and Anal.*, 17 (1964), pp. 79-84.
3. Uniqueness of positive weak solutions of second order parabolic equations. *Ann. Polon. Math.*, 16 (1964-65), pp. 285-303.

Aronson, D. G., and P. Besala

1. Uniqueness of positive solutions of parabolic equations with unbounded coefficients. *Colloquium Math.*, (in print).

Aronson, D. G., and J. B. Serrin

1. Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations. *University of Minnesota Report*, 1966.

Barta, J.

1. Sur la vibration fondamentale d'une membrane. *Comptes Rendus de l'Acad. des Sci., Paris*, 204 (1937), pp. 472-473.

2. Über die elastische Grundschwingung eingespannter Stäbe. *Ingenieur Archiv*, 8 (1937), pp. 35-37.

Bernstein, S. N.

1. Sur la généralisation du problème de Dirichlet. *Math Ann.*, 69 (1910), pp. 82-136.
2. Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differential gleichungen vom elliptischen Typus. *Math Zeit.*, 26 (1927), pp. 551-558.
3. On the equations of the calculus of variations. *Uspekhi Mat. Nauk*, 8 (1941), pp. 32-74.

Bers, L.

1. On mildly nonlinear partial differential equations of elliptic type, *J. of Research of Nat. Bureau of Standards*, 51 (1953), pp. 229-236.
2. Existence and uniqueness of a subsonic flow past a given profile. *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 7 (1954), pp. 441-504.

Bers, L., F. John, and M. Schechter

1. Partial Differential Equations. New York: Interscience Publishers, Inc., 1964.

Bers, L., and L. Nirenberg

1. On linear and nonlinear elliptic boundary value problems in the plane. *Convegno Internazionalle sulle Equazioni à Derivati Parziali*, (Trieste, 1954), Edizioni Cremonese (1955), pp. 141-167.

Besala, P.

1. A remark on a problem of M. Krzyżański concerning second order parabolic equations. *Colloq. Math.*, 10 (1963), pp. 161-164.
2. On solutions of Fourier's first problem for a system of non-linear parabolic equations in an unbounded domain. *Ann. Polon. Math.*, 13 (1963), pp. 247-265.
3. Concerning solutions of an exterior boundary-value problem for a system of non-linear parabolic equations. *Ann. Polon. Math.*, 14 (1964), pp. 289-301.
4. On solutions of non-linear second order elliptic equations defined in unbounded domains. *Atti. Sem. Mat. Fis. Università di Modena*, 13 (1964), pp. 74-86.
5. On weak differential inequalities. *Ann. Polon. Math.*, 16 (1965), pp. 185-194.
6. Limitations of solutions of non-linear parabolic equations in unbounded domains. *Ann. Polon. Math.*, 17 (1965), pp. 25-47.

Bitsadze, A. V.

1. Equations of the Mixed Type. New York: Pergamon Press, 1964.

Blohina, G. N.

1. Theorems of Phragmèn-Lindelöf type for a second order linear elliptic equation. *Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R.*, 162 (1965), pp. 727-730. Translated in *Soviet Math.*, 6 (1965), pp. 720-723.

Bodanko, W.

1. Sur le problème de Cauchy et les problèmes de Fourier pour les équations

paraboliques dans un domaine non borné. *Ann. Polon. Math.*, 18 (1966), pp. 79-94.

Bohn, E., and L. K. Jackson

1. The Liouville theorem for a quasilinear elliptic partial differential equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 104 (1962), 392-397.

Calabi, E.

1. An extension of E. Hopf's maximum principle with an application to Riemannian geometry. *Duke Math. J.*, 25 (1958), pp. 45-56.

Carroll, R.

1. L'équation d'Euler-Poisson-Darboux et les distributions sousharmoniques. *Comptes Rendus de l'Acad. des Sci., Paris*, 246 (1958), pp. 2560-2562.
2. Some singular Cauchy problems. *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, ser. 4, 56 (1961), pp. 1-31.

Clark, C., and C. A. Swanson

1. Comparison theorems for elliptic differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16 (1965), pp. 886-890.

Coddington, E. A., and N. Levinson

1. Theory of Ordinary Differential Equations. New York: McGraw-Hill Book Company, 1955.

Collatz, L.

1. Fehlerabschätzung für Näherungslösungen parabolischer Differentialgleichungen. *Anais Acad. Brasileira de Ciências*, 28 (1956), pp. 1-9.
2. Fehlerabschätzungen bei Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen mit unendlichem Grundgebiet. *Zeitschr. für Ang. Math. und Phys.*, 9a (1958), pp. 118-128.
3. Approximation in partial differential equations. *On Numerical Approximation*, Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1959, pp. 413-422.
4. The numerical treatment of differential equations. Berlin: Springer-Verlag OHG, 1960.

Courant, R., and D. Hilbert

1. Methods of Mathematical Physics. New York: Interscience Publishers, Inc., 1962, volume 2.

Duffin, R. J.

1. Lower bounds for eigenvalues. *Phys. Rev.*, (2) 71 (1947), pp. 827-828.
2. The maximum principle and biharmonic functions. *Journal of Math. Anal. and Applic.*, 3 (1961), pp. 399-405.

Dymkov, S. S.

1. The first boundary value problem for quasi-linear elliptic equations. *Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R.*, 115 (1957), pp. 220-222.

Earnshaw, S.

1. On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether. *Cambridge Phil. Soc. Trans.*, 7 (1839), pp. 97-112.

Eidelman, S. D.

1. On the fundamental solution of parabolic systems. *Mat. Sbornik*, 95 (1961), pp. 73-136.

Feller, W.

1. Über die Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischem Typus. *Math. Ann.*, 102 (1930), pp. 633-649.

Fichera, G.

1. Su un principio di dualità per talune formole di maggiorazione. *Atti. Rend., Accad. Naz. Lincei*, (8) 19 (1955), pp. 411-418.
2. Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine. *Atti. Accad. Naz. Lincei Memorie*, (8), 5 (1956), pp. 3-30.
3. On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order. *Boundary Value Problems in Differential Equations*, Madison, Wis.: University of Wisconsin Press (1960), pp. 97-120.
4. El teorema del massimo modulo per l'equazione dell'elastostatica tridimensionale. *Arch. for Rat. Mech. and Anal.*, 7 (1961), pp. 373-387.

Fife, P. C.

1. Growth and decay properties of solutions of second order elliptic equations. *Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa*, Classe di Scienze 20 (1966), pp. 675-701.

Finn, R.

1. New estimates for equations of minimal surface type. *Arch. for Rat. Mech. and Anal.*, 14 (1963), pp. 337-375.

Finn, R., and D. Gilbarg

1. Three-dimensional subsonic flows and asymptotic estimates for elliptic partial differential equations. *Acta Math.*, 98 (1957), pp. 265-296.
2. Asymptotic behavior and uniqueness of plane subsonic flows. *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 10 (1957), pp. 23-63.

Friedman, A.

1. On two theorems of Phragmèn-Lindelöf for linear elliptic and parabolic differential equations of the second order. *Pacific J. of Math.*, 7 (1957), pp. 1563-1575.
2. Remarks on the maximum principle for parabolic equations and its applications. *Pacific J. of Math.*, 8 (1958), pp. 201-211.
3. A strong maximum principle for weakly subparabolic functions. *Pacific J. of Math.*, 11 (1961), pp. 175-184.
4. Partial Differential Equations of Parabolic Type. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1964.

Garabedian, P.

1. Partial Differential Equations. New York: Interscience Publishers, Inc., 1964.

Gauss, C. F.

1. Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus. *Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre* 1838. Leipzig (1839). Also in Werke (Collected Works), 5, p. 129.

Germain, P., and R. Bader

1. Sur le problème de Tricomi. *Rend. del Circ. Mat. di Palermo*, (2) 2 (1953), pp. 53-70

Gilbarg, D.

1. The Phragmèn-Lindelöf theorem for elliptic partial differential equations. *J. of Rat. Mech. and Anal.*, 1 (1952), pp. 411-417.
2. Uniqueness of axially symmetric flow with free boundaries. *J. of Rat. Mech. and Anal.*, 1 (1952), pp. 309-320.
3. Comparison methods in the theory of subsonic flows. *J. of Rat. Mech. and Anal.*, 2 (1953), pp. 233-251.
4. Some hydrodynamical applications of function theoretic properties of elliptic equations, *Math. Zeitschr.*, 72 (1959), pp. 165-174.

Gilbarg, D., and J. B. Serrin

1. On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations. *J. d'Analyse Math.*, 4 (1954-56), pp. 309-336.

Gilbarg, D., and M. Shiffman

1. On bodies achieving extrema values for the critical Mach number. *J. of Rat. Mech. and Anal.*, 3 (1954), pp. 209-230.

Giraud, G.

1. Généralizations des problèmes sur les opérations du type elliptiques. *Bull. des Sciences Math.*, 56 (1932), pp. 248-272, 281-312, 316-352, 384.
2. Problèmes de valeurs à la frontière relatifs à certaines données discontinues. *Bull. de la Soc. Math. de France*, 61 (1933), pp. 1-54.

Glagelova, R. Ja.

1. The three cylinder theorem and its applications. *Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, 163 (1965), pp. 801-804. Translated in *Soviet Math.*, 6 (1965), pp. 1004-1008.

Gloistehn, H.

1. Monotoniesätze bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung. *Arch. for Rat. Mech. and Anal.*, 6 (1960), pp. 399-408.
2. Monotoniesätze und Fehlerabschätzungen für Anfangswertaufgaben mit Hyperbolischer Differentialgleichung. *Arch. for Rat. Mech. and Anal.*, 14 (1963), pp. 384-404.

Haar, A.

1. Sur l'unicité des solutions des équations aux dérivées partielles. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Paris*, 187 (1928), p. 23.

Habetler, G. J., and M. A. Martino

1. Existence theorems and spectral theory for the multigroup diffusion model. *Proc., Symp. in Appl. Math. XI. Nuclear Reactor Theory.* American Math. Soc. (1961), pp. 127-139.

Hadamard, J.

1. Extension à l'équation de la chaleur d'un théorème de A. Harnack. *Rend. del Circ. Mat. di Palermo*, (2) 3 (1954), pp. 337-346.

Hartman, P.

1. Ordinary Differential Equations. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1964.

Hartman, P., and R. Sacksteder

1. On maximum principles for non-hyperbolic partial differential operators. *Rend. del Circ. Mat. di Palermo*, (2) 6 (1957), pp. 218-232.

Hartman, P., and A. Wintner

1. On a comparison theorem for self-adjoint partial differential equations of elliptic type. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6 (1955), pp. 62-65.

Heins, M. H.

1. On the Phragmèn-Lindelöf principle. *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, 60 (1946), pp. 238-244.
2. Selected Topics in the Classical Theory of Functions of a Complex Variable. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1962.

Heinz, E.

1. Über die Lösungen der Minimalflächengleichung. *Nachr. der Akad. der Wissenschaften, Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1952), pp. 51-56.

Hellwig, G.

1. Partial Differential Equations. Waltham, Mass.: Blaisdell Publishing Company, 1964.

Hersch, J.

1. Sur la fréquence fondamentale d'une membrane vibrante: évaluations par défaut et principe de maximum. *Zeitschr. für Angew. Math. und Phys.*, 11 (1960), pp. 387-413.
2. Physical interpretation and strengthening of M. H. Protter's method for vibrating nonhomogeneous membranes; its analogue for Schroedinger's equation. *Pacific J. of Math.*, 11 (1961), pp. 971-980.

Hooker, W.

1. Lower bounds for the first eigenvalue of elliptic equations of order two and four. *Technical Report 10*, Math. Dept. Univ. of Calif., Berkeley (1960).

Hopf, E.

1. Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. *Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss.*, 19 (1927), pp. 147-152.
2. A remark on linear elliptic differential equations of the second order. *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, 3 (1952), pp. 791-793.
3. Remarks on the preceding paper of D. Gilbarg. *J. of Rat. Mech. and Anal.*, 1 (1952), pp. 419-424.

Huber, A.

1. On the uniqueness of generalized axially symmetric potential. *Ann. of Math.*, 60 (1954), pp. 351-358.

Il'in, A. M., A. S. Kalashnikov, and O. A. Oleinik

1. Linear second order parabolic equations. *Uspekhi Math. Nauk S. S. S. R.*, 17 (1962), pp. 3-146. Translated in *Russian Math. Surveys*, 17 (1962), No. 3, pp. 1-143.

Juberg, R. K.

1. Several observations concerning a maximum principle for parabolic systems. *Technical Report*, Univ. of Calif., Irvine (1967).

Kadlec, J., and R. Výborný

1. Strong maximum principle for weakly nonlinear parabolic equations. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 6 (1965), pp. 19-20.

Kaplan, S.

1. On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations. *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 16 (1963), pp. 305-330.

Kellogg, O. D.

1. Foundations of Potential Theory, New York: Frederick Ungar Publishing Co., 1929.

Kolodner, I., and R. Pederson

1. Pointwise bounds for solutions of semilinear parabolic equations. *Journal of Differential Equations*, 2 (1966), pp. 353-364.

Korn, A.

1. Lehrbuch der Potentialtheorie, 2. Berlin: Ferd. Dümmlers Verlagsbuchhandlung, 1901, volume 2.

Kreith, K.

1. A new proof of a comparison theorem for elliptic equations. *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, 14 (1963), pp. 33-35.

Kružkov, S. N.

1. Certain properties of solutions of elliptic equations. *Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, 150 (1963), pp. 470-473. Translated in *Soviet Math.*, 4 (1963), pp. 686-690.

Krzyżański, M.

1. Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique déterminées par les conditions initiales. *Ann. Soc. Polon. Math.*, 18 (1945), pp. 145-156.
2. Sur les solutions de l'équation linéaire du type elliptique, discontinues sur la frontière du domaine de leur existence. *Studia Math.*, 11 (1950), pp. 95-125.
3. Evaluations des solutions de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique, déterminées dans un domaine non borné. *Ann. Polon. Math.*, 4 (1957), pp. 93-97.
4. Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale. *Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astr. Phys.*, 7 (1959), pp. 131-135.

Ladyzhenskaya, O. A.

1. The solution of the first boundary value problem in the large for quasi-linear parabolic equations. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 7 (1958), pp. 147-177.

Ladyzhenskaya, O. A., and N. N. Ural'tzeva

1. Quasi-linear elliptic equations and variational problems with many independent variables. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 16 (1961), pp. 19-90. Translated in *Russian Math. Surveys*, 16 (1961), No. 1, pp. 17-91.

2. Boundary value problems for linear and quasilinear parabolic equations. *Izv. Akad. Nauk S.S.S.R.*, 26 (1962), pp. 5-52 and 753-780.

Landis, E. M.

1. Some questions in the qualitative theory of elliptic and parabolic equations. *Uspekhi Mat. Nauk*, (85) 14 (1959), pp. 21-85. Translated as *Amer. Math. Soc. Translations*, ser. 2, No. 20.
2. A three-sphere theorem. *Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, 148 (1963), pp. 277-279. Translated in *Soviet Math.*, 4 (1963), pp. 76-78.
3. Some problems of the qualitative theory of second order elliptic equations. (Case of several variables.) *Uspekhi Mat. Nauk*, 18 (1963), pp. 3-62. *Translated in Russian Math. Surveys*, 18 (1963), pp. 1-62.

Lavrentiev, M.

1. On certain properties of univalent functions and their applications to wake theory. *Mat. Sbornik*, 46 (1938), pp. 391-458.

Lees, M.

1. A boundary value problem for nonlinear ordinary differential equations. *J. of Math. and Mech.*, 10 (1961), pp. 423-430.

Leighton, W.

1. Comparison theorems for linear differential equations of second order. *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, 13 (1962), pp. 603-610.

Leja, F.

1. Remarques sur le travail de M. Picone. *Ann. de la Soc. Polon. de Math.*, 21 (1948), pp. 170-172.

Levi, E. E.

1. Sull' equazione del calore. *Reale Accad. dei Lincei, Roma. Rendiconti*, (5) 162 (1907), pp. 450-456.
2. Sull' equazione del calore. *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, 14 (1908), pp. 187-264.

Lichtenstein, L.

1. Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. *Rend. del Circ. Mat. di Palermo*, 33 (1912), pp. 201-211.
2. Neue Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. *Math. Zeitschr.*, 20 (1924), pp. 194-212.

Littman, W.

1. A strong maximum principle for weakly L-subharmonic functions. *J. of Math. and Mech.*, 8 (1959), pp. 761-770.
2. Generalized subharmonic functions: monotonic approximations and an improved maximum principle. *Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa.*, (3) 17 (1963), pp. 207-222.

Łojczyk-Królikiewicz, I.

1. Sur l'unicité et les limitations des solutions des problèmes de Fourier relatifs aux équations paraboliques à coefficients non bornés. *Ann. Polon. Math.*, 15 (1964), pp. 33-41.

McNabb, A.

1. Comparison and existence theorems for multicomponent diffusion systems. *J. of Math. Anal. and Appl.*, 3 (1961), pp. 133-144.
2. Strong comparison theorems for elliptic equations of second order. *J. of Math. and Mech.*, 10 (1961), pp. 431-440.

Meyer, A. G.

1. Schranken für die Lösungen von Randwertaufgaben mit elliptischer Differentialgleichung. *Arch. for Rat. Mech. and Anal.*, 6 (1960), pp. 277-298.

Meyers, N., and J. B. Serrin

1. The exterior problem for second order elliptic partial differential equations. *J. of Math. and Mech.*, 9 (1960), pp. 513-538.

Miller, K.

1. Three circle theorems in partial differential equations and applications to improperly posed problems. *Arch. for Rat. Mech. and Anal.*, 16 (1964), pp. 126-154.
2. An eigenfunction expansion method for problems with overspecified data. *Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa*, (3) 19 (1965), pp. 397-405.

Miranda, C.

1. Formule di maggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche di due variabili. *Giorn. Mat. Battaglini*, 78 (1948-49), pp. 97-118.
2. Sulla proprietà di minimo e di massimo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico. *Atti. Rend. Accad. Naz. dei Lincei*, (8) 10 (1951), pp. 117-120.
3. Equazioni alle derivate parziali di tipo ellitico. Berlin: Springer-Verlag OHG, 1955.
4. Teorema del massimo modulo e teorema di esistenza e di unicità per il problema di Dirichlet relative alle equazioni ellitiche in due variabili. *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, 46 (1958), pp. 265-311.

Mlak, W.

1. Differential inequalities of parabolic type. *Ann. Polon. Math.*, 3 (1957), pp. 349-354.

Morawetz, C.

1. Note on a maximum principle and a uniqueness theorem for an elliptic-hyperbolic equation. *Proc. of the Roy. Soc. of London*, Ser. A, 236 (1956), pp. 141-144.

Moser, J.

1. On Harnack's theorem for elliptic differential equations. *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 14 (1961), pp. 577-591.
2. A Harnack inequality for parabolic differential equations. *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 17 (1964), pp. 101-134 and 20 (1967), pp. 231-236.

Moutard, T.

1. Notes sur les équations aux dérivées partielles. *J. de l'École Polytechnique*, 64 (1894), pp. 55-69.

Müller, M.

1. Über die Eindeutigkeit der Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen und die Konvergenz einer Gattung von Verfahren zur approximation dieser Integrale. *Sitzungsber., Heidelberger Akad. d. Wiss., Math.-natural. Kl.* (1927), 9. abh.

Nagumo, M., and S. Simoda

1. Sur la solution bornée de l'équation aux dérivées partielles du type elliptique. *Proc. Japan. Acad.*, 27 (1951), pp. 334-339.
2. Note sur l'inégalité différentielle concernant les équations du type parabolique. *Proc. Japan. Acad.*, 27 (1951), pp. 536-539.

Neumann, C.

1. Über die Methode des Arithmetischen Mittels. *Abhand. der Königl. Sächsischen Ges. der Wissenshaften, Leipzig*, 10 (1888), pp. 662-702.

Nickel, K.

1. Einige Eigenschaften von Lösungen der Prandtlschen Grenzschicht-Differentialgleichungen. *Arch. for Rat. Mech. and Anal.*, 2 (1958), pp. 1-31.
2. Fehlerabschätzung bei parabolischen Differentialgleichungen. *Math. Zeit.*, 71 (1959), pp. 268-282.

Nirenberg, L.

1. A strong maximum principle for parabolic equations. *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 6 (1953), pp. 167-177.
2. Estimates and existence of solutions of elliptic equations. *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 9 (1956), pp. 509-531.

Nitsche, J. C. C.

1. Elementary proof of Bernstein's theorem on minimal surfaces. *Annals of Math.*, 66 (1957), pp. 543-544.
2. On new results in the theory of minimal surfaces. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, 71 (1965), pp. 195-270.

Oleinik, O. A.

1. On properties of some boundary problems for equations of elliptic type. *Math. Sbornik*, N. S. 30 (72) (1952), pp. 695-702.
2. On the equations of a boundary layer. *Seminari* 1962-1963 *di Analisi, Algebra, Geometria, e Topologia. Istituto Nazionale di Alta Matematica*, Edizioni Cremonese, Rome (1965), 1, pp. 372-387.
3. On some degenerate quasilinear parabolic equations. *Seminari* 1962-1963 *di Analisi, Algebra, Geometria, e Topologia, Istituto Nazionale di Alta Matematica*, Edizioni Cremonese, Rome (1965), 1, pp. 355-371.
4. A problem of Fichera. *Dokl. Akad. Nauk S. S. S. R.*, 157 (1964), pp. 1297-1301. Translated in *Soviet Math.*, 5 (1964), pp. 1129-1133.

5. Alcuni resultati sulle equazioni lineari e quasi lineari ellitico-paraboliche a derivate parziali del secondo ordine. *Atti Rend., Accad. Naz. dei Lincei*, (8) 40 (1966), pp. 775-784.
6. On the existence, uniqueness, stability and approximation of solutions of Prandtl's system for the nonstationary boundary layer. *Atti Rend., Accad. Naz. dei Lincei*, (8) 41 (1966), pp. 32-40.

Oleinik, O. A., and S. N. Kružkov

1. Quasi-linear second order parabolic equations with many independent variables. *Uspekhi Math. Nauk S. S. S. R.*, 16 (1961), pp. 115-156.

Oleinik, O. A., and T. D. Wentzel

1. The first boundary value problem and Cauchy's problem for quasi-linear equations of parabolic type. *Dokl. Akad. Nauk S. S. S. R.*, 97 (1954), pp. 605-608.
2. The first boundary value problem and Cauchy's problem for quasi-linear equations of parabolic type. *Math. Sbornik*, N. S. 41 (83) (1957), pp. 105-128.

Paraf, A.

1. Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation linéaire générale du second ordre. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, *ser.* I, 6 (1892), H, pp. 1-75.

Payne, L. E.

1. Some explicit inequalities for uniformly elliptic operators. *Duke Math J.*, 31 (1964), pp. 485-489.

Payne, L. E., and D. Sather

1. On a singular hyperbolic operator. *Duke Math. J.*, 34 (1967), pp. 147-162.

Petrovsky, I. G.

1. Lectures on Partial Differential Equations. New York: Interscience Publishers, Inc., 1954.

Pfluger, A.

1. Quelques théorèmes sur une classe de fonctions pseudo-analytiques. *Comptes Rendus de l'Acad. des Sci., Paris*, 231 (1950), pp. 1022-1023.

Picard, E.

1. Traité d'Analyse. Paris: Gauthier-Villars, 1905, volume 2.

Picone, M.

1. Maggiorazione degli integrali di equazioni lineari ellitico-paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine. *Atti Rend. Accad. Naz. dei Lincei*, (6) 5 (1927), pp. 138-143.
2. Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali de secondo ordine. *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, (4) 7 (1929), pp. 145-192.
3. Sul problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera, conduttore, isotropo, é omogeneo. *Math. Ann.*, 101 (1929), pp. 701-712.

4. Nuove formule di maggiorazione per gli integrali delle equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine ellitico-paraboliche. *Atti. Rend. Accad. Naz. dei Lincei*, (6) 28 (1938), pp. 331-335.

5. Intorno alla teoria di una classica equazione a derivate parziali. *Annales de la Soc. Polon. de Math.*, 21 (1948), pp. 161-169.

Pini, B.

1. Sui punti singolari delle soluzioni delle equazioni paraboliche lineari. *Ann. Univ. di Ferrara, Sezione* VII, *Scienze Mat.*, 4 (1953), pp. 2-12.

2. Sulla soluzione generalizzata di Wiener per il primo problema di valori al contorno nel caso parabolico. *Rend., Sem. Mat., Univ. Padova*, 23 (1954), pp. 422-434.

Polya, G., and G. Szegö

1. Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1951.

Protter, M. H.

1. A maximum principle for hyperbolic equations in a neighborhood of an initial line. *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, 87 (1958), pp. 119-129.

2. Lower bounds for the first eigenvalue of elliptic equations. *Annals of Math.*, 71 (1960), pp. 423-444.

3. Properties of solutions of parabolic equations and inequalities. *Canad. J. of Math*, 13 (1961), pp. 331-345.

Protter, M. H., and H. F. Weinberger

1. On the capacity of composite conductors. *Journ. of Math and Physics*, 44 (1965), pp. 375-383.

2. On the spectrum of general second order operators. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, 72 (1966), pp. 251-255.

Pucci, C.

1. Sulla maggiorazione dell' integrale di un equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine. *Atti. Rend. Accad. Naz. dei Lincei*, (8) 10 (1951), pp. 300-306.

2. Alcune limitazioni per gli integrali delle equazioni differenziali a derivate parziali, lineari, del secondo ordine, di tipo ellitico-parabolico. *Atti. Rend. Accad. Naz. dei Lincei*, (8) 11 (1951), pp. 334-339.

3. Maggiorazione dell' soluzione di un problema al contorno, di tipo misto, relativo a una equazione a derivate parziali, lineare, del secondo ordine. *Atti. Rend. Accad. Naz. dei Lincei*, (8) 13 (1952), pp. 360-366.

4. Bounds for solutions of Laplace's equation satisfying mixed conditions. *J. of Rat. Mech. and Anal.*, 2 (1953), pp. 299-302.

5. Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellitico e parabolico. *Atti. Rend. Accad. Naz. dei Lincei*, (8) 23 (1957), pp. 370-375 and (8) 24 (1958), pp. 3-6.

6. Maximum and minimum first eigenvalues for a class of elliptic operators. *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, 17 (1966), pp. 788-795.

7. Operatori ellitici estremanti. *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, (4) 72 (1966), pp. 141-170.

8. Limitazioni per soluzioni di equazioni ellitiche. *Annali di Mat. Pura ed Appl.* (4) 74 (1966), pp. 15-30.

Redheffer, R. M.

1. Maximum principles and duality. *Monatshefte der Math.*, 62 (1958), pp. 56-75.
2. On the inequality $\Delta u \geq f(u, |\text{grad } u|)$. *J. of Math. Anal. and Appl.*, 1 (1960), pp. 277-299.
3. An extension of certain maximum principles. *Monatshefte für Math.*, 66 (1962), pp. 32-42.
4. Bemerkungen über Monotonie und Fehlerabschätzung bei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen. *Arch. for Rat. Mech. and Anal.*, 10 (1962), pp. 427-457.

Rosenbloom, P. C., and D. V. Widder

1. A temperature function which vanishes initially. *Amer. Math. Monthly*, 65 (1958), pp. 607-609.

Sather, D.

1. Maximum properties of Cauchy's problem in three-dimensional space-time. *Arch. for Rat. Mech. and Anal.*, 18 (1965), pp. 14-26.
2. A maximum property of Cauchy's problem in n-dimensional space-time. *Arch. for Rat. Mech. and Anal.*, 18 (1965), pp. 27-38.
3. A maximum property of Cauchy's problem for the wave operator. *Arch. for Rat. Mech. and Anal.*, 21 (1965-66), pp. 303-309.
4. Maximum and monotonicity properties of initial-boundary value problems for hyperbolic equations. *Pacific J. of Math.*, 19 (1966), pp. 141-157.

Schechter, M.

1. On the Dirichlet problem for second order equations with coefficients singular at the boundary. *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 13 (1960), pp. 321-328.

Schröder, J.

1. Invers-monotone Operatoren. *Arch. for Rat. Mech. and Anal.*, 10 (1962), pp. 276-295.
2. Monotonie-Eigenschaften bei Differentialungleichungen. *Arch. for Rat. Mech. and Anal.*, 14 (1963), pp. 38-60.

Serrin, J. B.

1. Uniqueness theorems for two free boundary problems. *Amer. J. of Math.*, 74 (1952), pp. 492-506.
2. Two hydrodynamical comparison theorems. *J. of Rat. Mech. and Anal.*, 1 (1952), pp. 563-572.
3. On plane and axially symmetric free boundary problems. *J. of Rat. Mech. and Anal.*, 2 (1953), pp. 563-575.
4. Comparison theorems for subsonic flows. *J. of Math. and Phys.*, 33 (1954), pp. 27-45.
5. On the Phragmèn-Lindelöf principle for elliptic differential equations. *J. of Rat. Mech. and Anal.*, 3 (1954), pp. 395-413.

6. On the Harnack inequality for linear elliptic equations. *J. d'Analyse Math.*, 4 (1954-56), pp. 292-308.
7. The Harnack inequality for elliptic partial differential equations in more than two independent variables. *Notices of the Amer. Math. Soc.* 5 (1958), pp. 52-53.
8. Local behavior of solutions of quasi-linear equations. *Acta Math.* 111 (1964), pp. 247-302.
9. A priori estimates for solutions of the minimal surface equation. *Arch. for Rat. Mech. and Anal.*, 14 (1963), pp. 337-375.

Stampacchia, G.

1. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Annales de l'Institut Fourier, Grenoble*, 15 (1965), pp. 189-258.

Stys, T.

1. On the unique solvability of the first Fourier problem for a parabolic system of linear differential equations of second order. *Prace Mat.*, 9 (1965), pp. 283-289.

Szarski, J.

1. Sur les systèmes majorants d'équations différentielles ordinaires. *Annales de la Soc. Polon. de Math.*, 23 (1950), pp. 206-223.
2. Sur les systèmes d'inégalités différentielles ordinaires remplies en dehors de certains ensembles. *Annales de la Soc. Polon. de Math.*, 24 (1951), pp. 1-8.
3. Sur la limitation et l'unicité des solutions d'un système non-linéaire d'équations paraboliques aux dérivées partielles du second ordre. *Ann. Polon. Math.*, 2 (1955), pp. 237-249.
4. Sur un système non-linéaire d'inégalités différentielles paraboliques. *Ann. Polon. Math.*, 15 (1964), pp. 15-22.
5. Differential inequalities. Warsaw: Polish Scientific Publishers, 1965.

Szeptycki, P.

1. Existence theorem for the first boundary problem for a quasilinear elliptic system. *Bull., Acad. Polon. des Sciences*, 7 (1959), pp. 419-424.

Täcklind, S.

1. Sur les classes quasianalytiques des solutions des équations aux dérivées partielles du type parabolique. *Nova Acta Societatis Scientarium Upsaliensis*, (4) 10 (1936), pp. 1-57.

Tikhonov, A. N.

1. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur. *Mat. Sbornik*, 42 (1935), pp. 199-216.

Titchmarsh, E. C.

1. Theory of Functions. London: Oxford University Press, 1932.

Tricomi, F. G.

1. Equazioni a Derivate Parziali. Rome: Edizioni Cremonese, 1957.

人名索引

内 容 索 引

一 画

二 画

三 画

四 画

五 画

六 画

七 画

八　画

九　画

十　画

十 一 画

十 二 画

十三画以上

其 他